

频率域电磁场偏移成像

宋维琪* 周 红

(石油大学(东营)勘探系)

摘 要

宋维琪,周红. 频率域电磁场偏移成像. 石油地球物理勘探, 1997, 32(4): 512~519

电磁场偏移是研究观测电磁场的上行波场,是以反向扩散传播方式使各个场源逐渐归位的。若向下传播的偏移场的相位与原来上行波场的相位在介质的分界面上相同,则通过电磁场偏移成像能够恢复地球内部反射场的相位。本文讨论的问题是建立在激发源为平面电磁波基础之上的,当然此方法也可以应用于一般地面激发的可控源问题。文中采用有限差分方法进行偏移成像,不仅可以确定地下电阻率异常的位置,而且还能反映电阻率异常的相对大小。理论试算的结果表明,效果十分明显。

主题词 电磁场 频率域 有限差分 偏移 数值计算 成像 上行波 下行波 相位

ABSTRACT

Song Weiqi and Zhou Hong. Migration of electromagnetic wave field in frequency domain. *OGP*, 1997, 32(4): 512~519

The migration of electromagnetic wave field involves both analysing the upgoing waves of observed electromagnetic wave field and recovering the correct locations of exciting sources by inverse propagation. We can make the migrated electromagnetic wave field recover phase property of reflection wave field inside the earth on condition that the phase of downgoing migrated wave field and the phase of the original upgoing wave field are equal at medium interface. The problem we discuss is based on plane wave excitation. Of course, the method may also be applied to problem relating to usual seismic vibrator on surface. Applying finite difference to migration can locate resistivity anomaly and show the relative magnitude of the resistivity anomaly. Theoretical result proves the method very effective.

Subject heading: electromagnetic field, frequency domain, finite difference, migration, numerical computation, image, upgoing wave, downgoing wave, phase

引 言

电磁波偏移成像问题与地震勘探中的弹性波偏移成像问题相类似,但二者又有本质的区

* Song Weiqi, Exploration Department, Petroleum University, Dongying City, Shandong Province, 257062

本文于 1996 年 10 月 18 日收到,修改稿于 1997 年 1 月 8 日收到。

别。弹性波场满足一般的波动方程,而电磁波限于我们讨论的方法满足扩散方程。但无论是电磁波还是弹性波偏移成像,其机理是相似的。

对于不同介质的分界面,能够体现此界面的像函数表示为

$$\text{map}(x, z) = u(x, z, t_d) / d(x, z, t_d)$$

即入射波的初至与反射波开始传播的时间相等,体现在相位上即是二者在界面上的相位相同。我们在地面上观测的电磁场是向下传播的场和向上传播的场的叠加结果,而向上传播的场是入射场经过地下各种介质反回到地面上的场。换句话说,这种场是地下各种介质源场的叠加场。偏移成像就是把这种向上传播的场以反时间方向传播,依次归位到各个场源即不同介质的分界面处。

至于在地面上观测到的电磁场如何分离成向上传播的场和向下传播的场的问题,文中没有过多的讨论,只是沿用了解决地震勘探中波场分离问题的处理方法。本文主要研究有限差分方法重建这些场在地下的分布情况,然后根据成像原理对这些重建的场进行偏移成像,最后转换成电阻率成像问题。

基 本 概 念

假定地面观测的电磁场为 $E_x^0(r, t)$, $E_y^0(r, t)$, $E_z^0(r, t)$; $H_x^0(r, t)$, $H_y^0(r, t)$, $H_z^0(r, t)$ 。假设 $E^m(r, \tau)$ 与 $H^m(r, \tau)$ 为偏移电磁场,则在地面上满足条件

$$\begin{aligned} \{E_x^m(r, \tau), E_y^m(r, \tau), E_z^m(r, \tau)\}_{z=0} &= \{E_x^0(r, \tau), E_y^0(r, \tau), 0\}_{z=0} \\ \{H_x^m(r, \tau), H_y^m(r, \tau), H_z^m(r, \tau)\}_{z=0} &= \{H_x^0(r, \tau), H_y^0(r, \tau), -H_z^0(r, \tau)\}_{z=0} \end{aligned}$$

并且还满足方程

$$\begin{cases} \nabla \times H^m(r, \tau) = \sigma_n(r) E^m(r, \tau) \\ \nabla \times E^m(r, \tau) = -\mu_0 \frac{\partial H^m(r, \tau)}{\partial \tau} \end{cases} \quad (1)$$

$$E^m(r, \tau) \rightarrow 0, H^m(r, \tau) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty; z \geq 0)$$

令实时间 $t = -\tau$, 则偏移场满足方程

$$\begin{cases} \nabla \times H^m(r, t) = \sigma_n(r) E^m(r, t) \\ \nabla \times E^m(r, t) = \mu_0 \frac{\partial H^m(r, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (2)$$

如果电导率 σ 是常数,那么在我们讨论的模型中电磁场满足扩散方程

$$\begin{cases} \nabla^2 E - \mu_0 \sigma_n \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \\ \nabla^2 H - \mu_0 \sigma_n \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

若以 P 表示电磁场的各个分量,以 P^m 表示偏移电磁场的各个分量,则它们分别满足方程

$$\nabla^2 P(r, t) - \mu_0 \sigma \frac{\partial P(r, t)}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

令 P^0 为地表上观测的电磁场分量,则

$$\begin{cases} P^m(r, -t)|_{z=0} = P^0(r, t)|_{z=0} \\ \nabla^2 P^m(r, -t) + \mu_0 \sigma \frac{\partial P^m(r, -t)}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

如果一般扩散方程描述的是电磁场从源到接收点的传播过程,那么偏移电磁场方程则描述了电磁场从接收点到源传播的反过程。这样,建立偏移场的问题就可归结为地表上行波以反向时间从地表向地下传播的连续性问题。实际上计算偏移场的问题也就是计算方程(1)~(5)的边值问题。

均匀介质中频波域场的解析连续和偏移

前面主要从数学角度讨论偏移电磁场问题,下面我们来分析电磁波场的分离、偏移场的连续性及稳定性等问题。

为了讨论问题方便,且不失普遍性,我们在频波域将方程(4)改写为

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} P_s(k_x, k_y, z, \omega) = \gamma^2 P_s(k_x, k_y, z, \omega) \quad (6)$$

式中: $\gamma^2 = k_x^2 + k_y^2 - i\omega\mu_0\sigma$ 是频波域的波数, $\text{Re}(\gamma) > 0$; $0 < z < d$, d 为从地表到电阻率异常体的距离; $P_s(k_x, k_y, z, \omega)$ 是 $P(r, t)$ 的谱函数。

方程(6)的解在同性层 $0 < z < d$ 区域内可以表示为

$$P_s(k_x, k_y, z, \omega) = P_s^u(k_x, k_y, \omega) \exp(\gamma z) + P_s^d(k_x, k_y, \omega) \exp(-\gamma z) \quad (7)$$

其中, $P_s^u(k_x, k_y, \omega)$, $P_s^d(k_x, k_y, \omega)$ 是地表上电磁场分量的上行波和下行波的频谱。

方程(7)说明,在均匀介质中,如果知道了场的上行部分和下行部分,那么场的向下解析连续问题就可以迎刃而解。场的分离问题我们采用 Berdichevsky 和 Zhdanov 的方法,直接给出分离结果。这样场的连续的下行部分和上行部分可分别表示为

$$\begin{cases} P_s^{\text{cd}}(k_x, k_y, z, \omega) = P_s^d(k_x, k_y, 0, \omega) \exp(-\gamma z) \\ P_s^{\text{cu}}(k_x, k_y, z, \omega) = P_s^u(k_x, k_y, 0, \omega) \exp(\gamma z) \end{cases} \quad (8)$$

从方程(8)的第二式我们可以看到,随着 z 的增大,上行波场的稳定性变差。

同理,根据方程(5),偏移场将满足方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial z^2} P_s^{\text{mu}*}(k_x, k_y, z, \omega) = \gamma^2 P_s^{\text{mu}*}(k_x, k_y, z, \omega) \\ \gamma^2 = k_x^2 + k_y^2 + i\omega\mu_0\sigma \end{cases} \quad (9)$$

式中: * 表示复共轭; $0 < z < \infty$ 。解方程(9)可得到深度 z 处偏移场的复共轭谱

$$P_s^{\text{mu}*}(k_x, k_y, z, \omega) = P_s^u(k_x, k_y, 0, \omega) \exp(-\gamma z) \quad (10)$$

方程(10)便给出了频波域偏移电磁场分量的算法。该算法是稳定的。

二维电磁场有限差分偏移

现在讨论二维地电介质 TE 极化的电磁场有限差分问题。根据上述讨论,在介质的电阻率变化不是很大的情况下,可以把电场的 y 分量近似地表示为

$$E_y(x, z, \omega) = Q_E^d(x, z, \omega) \exp(ik_n z) + Q_E^u(x, z, \omega) \exp(-ik_n z) \quad (11)$$

式中: Q_E^d, Q_E^u 是与深度有关的待定系数; $k_n(x, z, \omega) = (i\omega\sigma_n(x, z)\mu_0)^{\frac{1}{2}}$; $\sigma_n(x, z)$ 是背景电导率。

上述电场分量的上行、下行部分满足亥姆霍兹方程, 即

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_y^{d,u}(x, z, \omega) + k_n^2(x, z, \omega) E_y^{d,u}(x, z, \omega) = 0 \quad (12)$$

将方程(11)代入式(12)得

$$\frac{\partial^2 Q_E^{d,u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_E^{d,u}}{\partial z^2} \pm 2ik_n \frac{\partial Q_E^{d,u}}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

其中, ‘+’表示下行波, ‘-’表示上行波。

将式(13)对 z 微分, 且忽略 $k_n(x, z, \omega)$ 的导数, 假定在局部 $k_n(x, z, \omega)$ 是常数, 即介质电阻率变化较平缓的情况下, 有

$$\frac{1}{2ik_n} \frac{\partial^3 Q_E^{d,u}}{\partial x^2 \partial z} + \frac{1}{2ik_n} \frac{\partial^3 Q_E^{d,u}}{\partial z^3} \pm \frac{\partial^2 Q_E^{d,u}}{\partial z^2} = 0 \quad (14)$$

把式(13)变换为

$$\frac{\partial^2 Q_E^{d,u}}{\partial x^2} \mp 2ik_n \frac{\partial Q_E^{d,u}}{\partial z} = \frac{\partial^2 Q_E^{d,u}}{\partial z^2}$$

代入式(14), 且忽略对 z 的三阶导数, 可得

$$\frac{\partial^3 Q_E^{d,u}}{\partial x^2 \partial z} = \mp 2ik_n \frac{\partial^2 Q_E^{d,u}}{\partial x^2} + (2ik_n)^2 \frac{\partial Q_E^{d,u}}{\partial z} \quad (15)$$

偏移场同样满足亥姆霍兹方程, 仿照以上的推导过程可得

$$\frac{\partial^3 Q_E^{mu}}{\partial x^2 \partial z} = 2k_n \frac{\partial^2 Q_E^{mu}}{\partial x^2} + (2k_n)^2 \frac{\partial Q_E^{mu}}{\partial z} \quad (16)$$

求出式中的系数后, 代入电场分量的解的表达式中, 最后就可以求出这些分量。

TM 极化方式与上述情况相类似, 此处不再赘述。

磁场分量的解可通过如下转换求出, 即

$$\begin{cases} H_x^{d,u} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_y^{d,u}}{\partial z} \\ H_z^{d,u} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_y^{d,u}}{\partial x} \end{cases} \quad (17)$$

电磁场的相位和地电边界的关系

首先考虑两层地电模型, 两层的分界面为 S 。那么在 TE 极化方式下, 电场 y 分量及其对 z 的导数分别为

$$\text{第一层} \quad \begin{cases} E_y(x, z, \omega) = Q_E^d(x, z, \omega) \exp(ik_1 z) + Q_E^u(x, z, \omega) \exp(-ik_1 z) \\ E'_y(x, z, \omega) = ik_1 Q_E^d(x, z, \omega) \exp(ik_1 z) - ik_1 Q_E^u(x, z, \omega) \exp(-ik_1 z) \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{第二层} \quad \begin{cases} E_y(x, z, \omega) = Q_E(x, z, \omega) \exp(ik_2 z) \\ E'_y(x, z, \omega) = ik_2 Q_E(x, z, \omega) \exp(ik_2 z) \end{cases} \quad (19)$$

在分界面上, 由电场的切线分量连续可得

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{Q_E^u}{Q_E^d} &= \beta^{(1)}(x, z_s) \exp(2ik_1 z_s) \\ \beta^{(1)}(x, z_s) &= \frac{\sqrt{\sigma_1(x, z_s)} - \sqrt{\sigma_2(x, z_s)}}{\sqrt{\sigma_1(x, z_s)} + \sqrt{\sigma_2(x, z_s)}} \end{aligned} \right. \quad (20)$$

式中, $\beta^{(1)}(x, z_s)$ 即是反射系数。视反射函数为

$$\beta_{Ea}(x, z, \omega) = \frac{E_y^u(x, z, \omega)}{E_y^d(x, z, \omega)} = \frac{Q_E^u(x, z, \omega)}{Q_E^d(x, z, \omega)} \exp(-2ik_1 z) \quad (21)$$

由方程(20), 在边界上有

$$\beta_{Ea}(x, z_s, \omega) = \beta^{(1)}(x, z_s) \quad (22)$$

因此, 在地电边界上, 电场的视反射函数等于真实的反射系数。

由上述讨论我们看到, 虽然电场的上行部分和下行部分的相位与频率有关, 但当这两部分波场接近界面时, 它们的相位几乎与频率无关。这一结论从物理学角度来说, 意味着在介质的分界面上, 入射场和反射场的相位相同。这也正是本文所讨论的成像条件。

这样, 我们可以写出电场的视反射函数

$$\beta_{Ea}(x, z, \omega) = \frac{E_y^u}{E_y^d} = \left| \frac{E_y^u}{E_y^d} \right| \exp(i(\phi_E^u - \phi_E^d)) \quad (23)$$

归一化的视反射函数为

$$\beta_{Ea}^n = \frac{\beta_{Ea}}{|\beta_{Ea}|} = \exp(i(\phi_E^u - \phi_E^d)) \quad (24)$$

从式(24)可以看到, 归一化的视反射函数只与相位差有关。当到达边界时, 相位差则与频率无关。于是我们就可以对不同频率归一化的视反射函数进行叠加, 其结果在介质的分界面处得到加强, 而在其它地方相对减弱, 相应的叠加公式为

$$\overline{\beta_{Ea}^n(x, z)} = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \beta_{Ea}^n(x, z, \omega_j) \quad (25)$$

对于多层介质, 要想使第 L 和 $L+1$ 层分界面处不同频率归一化视反射函数的叠加结果得到加强, 所取的频率必须满足关系式

$$\delta(\omega^{(i)}) < Z_{s_{i+1}} \quad (26)$$

也即所取频率的趋肤深度必小于界面的深度。对于多个分界面而言, 只要取不同的频率段叠加即可, 即

$$\overline{\beta_{Ea}^n(x, z = \delta(\omega_{j_0}))} = \frac{1}{J - j_0 + 1} \sum_{j=j_0}^J \beta_{Ea}^n(x, z, \omega_j) \quad (27)$$

式中, ω_{j_0} 是叠加频率间隔 (ω_{j_0}, ω_J) 的最低频率。

电 阻 率 成 像

在实际生产中, 不仅要求描绘地电边界的几何形状, 而且还要能够刻画出电阻率大小的分布情况。我们首先以两层介质为例。上文已经论述, 地电边界上的反射函数等于真实的反射系数, 即

$$\beta_1 = (\sqrt{\sigma_1} - \sqrt{\sigma_2}) / (\sqrt{\sigma_1} + \sqrt{\sigma_2})$$

因此,第二层的电阻率可按式

$$\rho_2 = \left[\frac{1 + \bar{\beta}_{Ea}(x, z)}{1 - \bar{\beta}_{Ea}(x, z)} \right] \rho_1 \quad (28)$$

计算出来。其中

$$\bar{\beta}_{Ea}(x, z) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \beta_{Ea}(x, z, \omega_j)$$

此外,由于叠加偏移反射函数使叠加结果在介质的分界面处得到加强,在其它地方相对减弱,因此我们在这里引入一个归一化的叠加偏移反射函数

$$\bar{\beta}_E^n(x, z) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\beta_E(x, z, \omega_j)}{|\beta_E(x, z, \omega_j)|} \quad (29)$$

来计算偏移视电阻率

$$\rho_m = \left[\frac{1 + \bar{\beta}_E^n(x, z) \bar{\beta}_{Ea}^n(x, z)}{1 - \bar{\beta}_E^n(x, z) \bar{\beta}_{Ea}^n(x, z)} \right] \rho_1 \quad (30)$$

偏移视电阻率在界面上等于第二层的电阻率,在其它地方等于背景电阻率。

现在我们来讨论用视反射函数和偏移反射函数来获得地电边界和有差异的电阻率的成像方法。在实际成像过程中,第一层的电阻率我们可以用常规方法求得。如在我们讨论的方法中,可以取足够高的频率获得第一层的电阻率。

以上算法同样适用于多层地电情况。在多层情况下,可以采用分阶段连续向下追踪地电分布情况的方法。在每一阶段中,要选取能够穿透所要研究层的频段的电磁波。具体方法如下:第一阶段用常规方法确定出第一层的电阻率;第二阶段,是在第一层电阻率已知的基础上,计算偏移反射函数和视反射函数,并根据叠加的反射函数的局部最大值确定出第二层顶部的位置和计算出第二层的电阻率;然后,在第二层电阻率已知的情况下,取另外一个频段,重复第二步,确定第三层的顶部位置和计算第三层的电阻率,依次可以确定出其它层的顶部位置和该层的电阻率值。当然也可以把式(30)应用于更一般的情况。在这种情况下,地电结构可以是各向异性,但是电阻率变化的梯度不能太大。这时偏移电阻率公式为

$$\rho_m = \left[\frac{1 + \bar{\beta}_E^n(x, z) \bar{\beta}_{Ea}^n(x, z)}{1 - \bar{\beta}_E^n(x, z) \bar{\beta}_{Ea}^n(x, z)} \right] \rho_n \quad (31)$$

其中, $\rho_n(x, z)$ 是背景电阻率。此时偏移叠加效果的好坏,主要取决于背景电阻率确定得是否合适。

理论模型试算结果分析

在进行理论模型试算结果分析之前,我们先对有限差分算法作一简要的讨论。本文主要利用微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 Q_E^{mu}}{\partial x^2 \partial z} &= 2k_n \frac{\partial^2 Q_E^{mu}}{\partial x^2} + (2k_n)^2 \frac{\partial Q_E^{mu}}{\partial z} \\ \frac{\partial^3 Q_E^{d,u}}{\partial x^2 \partial z} &= \mp 2ik_n \frac{\partial^2 Q_E^{d,u}}{\partial x^2} + (2ik_n)^2 \frac{\partial Q_E^{d,u}}{\partial z} \end{aligned}$$

进行差分近似计算。差分格式为: x 方向的二阶偏导数采用二阶中心差商代替, z 方向的一阶偏导数用一阶向前差商代替;差分网格采用矩形网格,且网格的间隔在纵向上呈等比级数增大,而在横向上采用固定网格距。地面观测值经过波场分离以后,分成上行波场和下行波场,并把偏移场和下行波场作为差分方程计算的初始值。计算是以平面电磁波在 TE 极化方式情况下(TM 极化情形类似)水平层状介质的计算结果作为左右边界条件,算法是收敛和稳定的。最后我们用均匀下半空间解析解对用差分算法计算的均匀下半空间的结果进行了验证,二者的结果十分吻合。

计算采用的地电模型如图 1 和图 3 所示。在埋深 1km 之下的不同位置均分布着三个电性

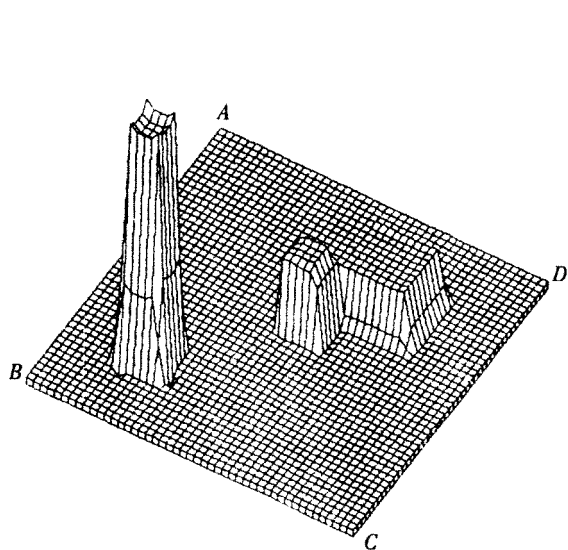


图 1 地电模型 1

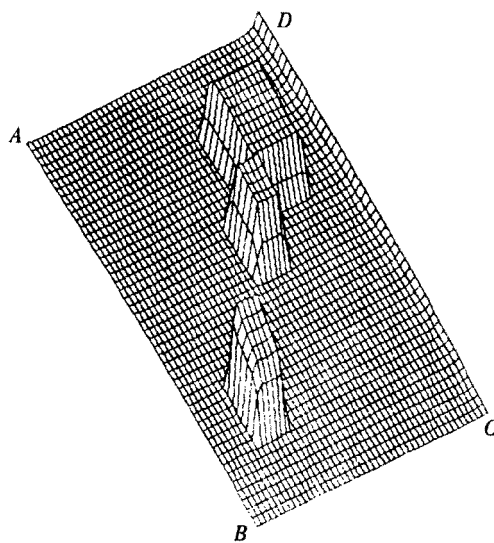


图 2 模型 1 的电阻率成像结果

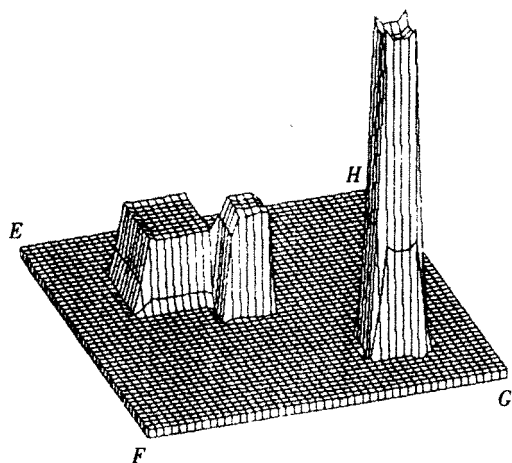


图 3 地电模型 2

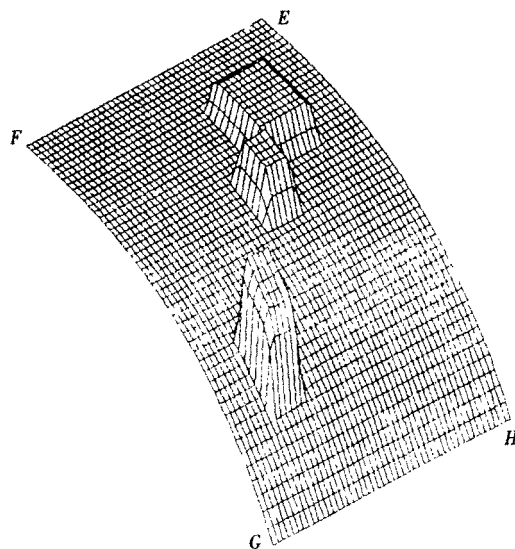


图 4 模型 2 的电阻率成像结果

异常体。模型1,三个电性体的电阻率分别为 $100\Omega\cdot\text{m}$ 、 $110\Omega\cdot\text{m}$ 、 $120\Omega\cdot\text{m}$,背景电阻率为 $90\Omega\cdot\text{m}$ (图1)。模型2,三个电性体的电阻率分别为 $7.0\Omega\cdot\text{m}$ 、 $8.0\Omega\cdot\text{m}$ 、 $8.5\Omega\cdot\text{m}$,电阻率的背景值为 $6.5\Omega\cdot\text{m}$ 。对模型1和模型2取初始频率分别为 10Hz 和 1Hz ,作20次叠加,终止频率分别为 200Hz 和 20Hz 。偏移成像以后的结果如图2和图4所示。图5为具有干扰时的地电模型1的电阻率成像结果。从图中可以看到,偏移后的结果与原来的模型吻合得非常好。但偏移后的电阻率与原来的电阻率在数值上有一定的偏差。其原因与我们选取的初始场不准有关,而且背景值的选取是否合适也直接影响计算结果。同时,从计算的结果还可以看到,所取频率的范围必须要和所计算的地电情况相一致。

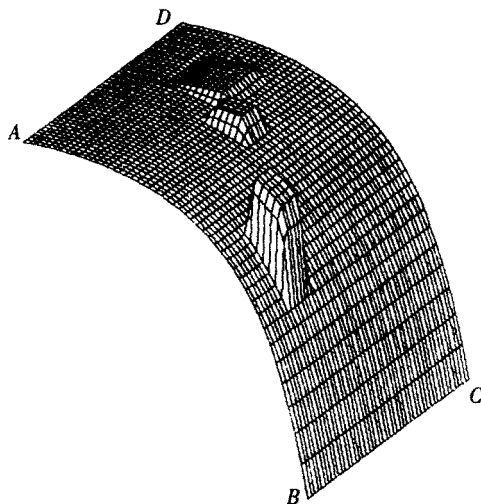


图5 具有干扰时的地电模型1的电阻率成像结果

结 束 语

理论计算结果表明,该方法可适用于天然电磁场源的大地电磁测深法,及可控电磁场源的波区频率测深法,并且也可用于井中或井间高频电磁波法。该方法的优点在于:反演结果直观,可以直接指明地电异常体的分布位置,分辨率较高,抗干扰性能也较强。不足之处是反演实际电阻率数值的精度还不够高。

参 考 文 献

- 1 Zhdanov M S, Traynin P and Booker J R. Underground imaging by frequency-domain electromagnetic migration. *Geophysics*, 1996, 61(3): 666~682
- 2 马在田著. 地震成像技术——有限差分法偏移, 石油工业出版社, 1989
- 3 Seunghee Lee George A Mcmechan, Carlos L V Aiken. 相区成像——电磁波场中的等效地震偏移算法. 石油物探译丛, 1989, (1)