

## 石油地球物理勘探

二维双相介质波动方程孔隙率反演  
的时卷正则迭代法

刘克安\* 刘宏伟 郭宝琦

(哈尔滨建筑大学) (哈尔滨工业大学)

管叶君 高兴有

(大庆石油管理局物探公司研究所)

## 摘要

刘克安, 刘宏伟, 郭宝琦, 管叶君, 高兴有. 二维双相介质波动方程孔隙率反演的时卷正则迭代法.  
石油地球物理勘探, 1996, 31(3): 410~414

应用时卷正则化方法对在二维双相介质的波动方程中参数——孔隙率进行反演, 可通过引入辅助边界脉冲源的响应, 导出关于孔隙率增量的线性化积分方程, 并利用正则化方法求解, 以便构成一种构造简单、稳定的迭代方法。文中给出的数值算例说明了该方法的可行性。

**主题词** 双相介质 波动方程 时卷正则化 孔隙率 反演

## ABSTRACT

Liu Kean, Liu Hongwei, Guo Baoqi, Guan Yequn and Gao Xingyou. Time -convolution regularization iteration method for wave-equation porosity inversion in 2-D two-phase medium. *OGP*, 1996, 31(3): 410~414

In applying time-convolution regularization to the inversion of porosity—a parameter of wave equation in 2-D two-phase medium, we may introduce the responses of supplementary-boundary pulse source to deduce the linearized integration equation relating to porosity increment, which then can be solved by using regularization method. The solution procedure is actually a simple and stable iterative method. The trial computation example proves the method feasible.

**Subject heading:** two-phase medium, wave equation, time-convolution regularization, porosity, inversion

## 引言

双相弹性介质理论认为, 实际的地下岩石是由固相、液相组成的。固相的多孔隙骨架是均匀的、各向同性的弹性固体; 充满孔隙空间的液相物质是具有黏滞性的、可压缩的流体。特别是

\* Liu Kean, Harbin Architecture University, Harbin City, Heilongjiang Province, Postcode, 150001

本文于1995年6月22日收到, 修改稿于1996年2月9日收到。

本项目由国家自然科学基金会、中国科学院、中国石油天然气总公司和大庆石油管理局联合资助。

含油储集层具有较大的孔隙率,因而表现出明显的双相介质的性质。它较传统的单相弹性介质的假设更接近于实际,也更有可能反映地震信息与地下岩石的力学性质之间的关系。所以,以此为基础发展起来的正演、反演研究具有较好的应用前景。

本文利用文献1的研究结果,采用时卷正则迭代法对二维双相介质波动方程中的参数——孔隙率 $\beta(x,z)$ 进行的反演,就是鉴于此所作的尝试。通过引入辅助边界脉冲源的响应,导出了关于孔隙率增量的线性化积分方程,并利用正则化方法解之,形成了一种构造简单、适用性较强、迭代稳定的数值方法。文中给出了数值模拟结果,表明了此方法的有效性。

## 模 型

由文献2在一些假设条件下,且忽略流体黏滞性的影响,二维双相介质中波动方程的初边值问题可抽象为

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha M \frac{\partial w_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = \rho \ddot{u}_x + \rho_i \ddot{w}_x - f \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha M \frac{\partial w_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = \rho \ddot{u}_z + \rho_i \ddot{w}_z - f \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha M \frac{\partial u_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial u_z}{\partial z} + M \frac{\partial w_x}{\partial x} + M \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = \rho_i \ddot{u}_x + m \ddot{w}_x - f \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha M \frac{\partial u_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial u_z}{\partial z} + M \frac{\partial w_x}{\partial x} + M \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) = \rho_i \ddot{u}_z + m \ddot{w}_z - f \quad (4)$$

其边界条件为

$$u_x|_{z=H} = u_z|_{z=H} = w_x|_{z=H} = w_z|_{z=H} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial n}|_r = \frac{\partial u_z}{\partial n}|_r = \frac{\partial w_x}{\partial n}|_r = \frac{\partial w_z}{\partial n}|_r = 0 \quad (6)$$

其初始条件为

$$u_x|_{t=0} = u_z|_{t=0} = w_x|_{t=0} = w_z|_{t=0} = 0 \quad (7)$$

$$\dot{u}_x|_{t=0} = \dot{u}_z|_{t=0} = \dot{w}_x|_{t=0} = \dot{w}_z|_{t=0} = 0 \quad (8)$$

在这里:求解区域为 $\Omega=\{(x,z)|0 \leq x \leq L, 0 \leq z \leq H\}$ , $t \in [0, T]$ ; $x$ 为沿地表测线方向坐标; $z$ 为深度坐标; $t$ 为时间; $u_x(x, z, t), u_z(x, z, t), w_x(x, z, t), w_z(x, z, t)$ 分别为固相、液相的 $x, z$ 方向的位移; $\dot{u}_x, \ddot{u}_x, \dot{w}_x, \ddot{w}_x, \dot{u}_z, \ddot{u}_z, \dot{w}_z, \ddot{w}_z$ 为相应函数的关于 $t$ 的一阶导数、二阶导数; $f$ 为震源力函数; $\Gamma$ 为 $\Omega$ 的边界去掉底边( $z=H$ )的部分; $n$ 为 $\Gamma$ 的外法线方向。其中所有参数均为关于 $(x, z)$ 的变量。本文中,设孔隙率 $\beta(x, z)$ 为未知数, $\alpha, \mu, \rho_i$ 为常量, $\rho, m, \lambda, M$ 随着孔隙率 $\beta(x, z)$ 而变化,其关系为

$$\rho = (1 - \beta)\rho_s + \beta\rho_l \quad (9)$$

$$m = (1 + \beta)\rho_i / 2\beta^2 \quad (10)$$

## 物理

## 勘探

$$M = K_s^2 \{ K_s [1 + \beta(K_s/K_f - 1)] - K_m \} \quad (11)$$

$$\lambda = \alpha^2 M \quad (12)$$

以上公式中: $\mu$ 为切变模量, $K$ 为体变模量, $\rho$ 为介质密度,其中未标下角的为固液双相介质的参数,标明下角f,s,m的分别为液体、固体和固体骨架的参数; $\lambda$ 为固液双相介质Lame系数; $M$ 为液相体变模量; $\alpha$ 为结构因子。各参数的相互关系见文献2。

给出了附加条件的地表地震记录为

$$u_x(x, 0, t) = g(x, t) \quad (x, t) \in [0, L] \times [0, T] \quad (13)$$

根据附加条件式(13)和二维双相介质的波动方程式(1)~(8)及式(9)~(12)去求解未知的孔隙率 $\beta(x, z)$ ,从而由式(1)~(13)构成对 $\beta(x, z)$ 的偏微分方程反问题。

## 时卷正则迭代法

## 孔隙率反演

令 $u$ 的边界脉冲响应函数 $\varphi_x(x, x', z, t)$ 和 $\varphi_z(x, x', z, t)$ , $w$ 的边界脉冲响应函数 $\psi_x(x, x', z, t)$ 和 $\psi_z(x, x', z, t)$ 满足如下参数方程

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha M \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) = \rho \ddot{\varphi}_x + \rho_t \ddot{\psi}_x + \delta(x - x', z, t) \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha M \frac{\partial \psi_x}{\partial z} + \alpha M \frac{\partial \psi_z}{\partial x} \right) = \rho \ddot{\varphi}_z + \rho_t \ddot{\psi}_z \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha M \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} + M \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) = \rho_t \ddot{\varphi}_x + m \ddot{\psi}_x \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \alpha M \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \alpha M \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} + M \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) = \rho_t \ddot{\varphi}_z + m \ddot{\psi}_z \quad (17)$$

$$u_x|_{z=H} = u_z|_{z=H} = w_x|_{z=H} = w_z|_{z=H} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial n} \Big|_r = \frac{\partial \varphi_z}{\partial n} \Big|_r = \frac{\partial \psi_x}{\partial n} \Big|_r = \frac{\partial \psi_z}{\partial n} \Big|_r = 0 \quad (19)$$

$$u_x|_{t=0} = u_z|_{t=0} = w_x|_{t=0} = w_z|_{t=0} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi_z}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi_z}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (21)$$

其中 $t \in [0, T]$ , $(x, z) \in \Omega$ , $x' \in [0, L]$ 。

设孔隙率 $\beta(x, z)$ 在当前值下有扰动 $\delta\beta(x, z)$ ,相应的 $u_x, u_z, w_x, w_z$ 有扰动 $\delta u_x(x, z), \delta u_z(x, z), \delta w_x(x, z), \delta w_z(x, z)$ ,则可将 $\beta(x, z) - \delta\beta(x, z), u_x(x, z) - \delta u_x(x, z), u_z(x, z) - \delta u_z(x, z), w_x(x, z) - \delta w_x(x, z), w_z(x, z) - \delta w_z(x, z)$ 代入式(1)~(4),各项展开,略去扰动平方项,分别对 $\varphi_x, \varphi_z, \psi_x, \psi_z$ 关于 $(x, z)$ 积分,关于 $t$ 取卷积,分部积分,分别合并 $\delta u_x(x, z), \delta u_z(x, z), \delta w_x(x, z), \delta w_z(x, z)$ 项,结合式(14)~(17),则得关于 $\delta u_x(x, z)$ 的积分方程

$$\begin{aligned} \delta u_x(x, z) = & \iint_A dx dz \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) * \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} + \right. \\ & + \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) * \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \right) \alpha \frac{\partial M}{\partial \beta} + \\ & + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) * \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) \alpha \frac{\partial M}{\partial \beta} + \\ & + \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) * \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) \frac{\partial M}{\partial \beta} + \\ & + (\ddot{u}_x * \varphi_x + \ddot{u}_z * \varphi_z) \frac{\partial \rho}{\partial \beta} + \\ & \left. + (\ddot{w}_x * \psi_x + \ddot{w}_z * \psi_z) \frac{\partial M}{\partial \beta} \right] \delta \beta(x, z) \quad (22) \end{aligned}$$

其中 \* 为关于  $t$  的卷积。

将上式左端近似为  $\delta u_x(x, z) = g(x, z) - u_x(x, 0, t)$ , 右端核函数记为  $K(x, x', z, t, t')$ , 则式(22)可简记为

$$g(x, z) - u_x(x, 0, t) = \iiint K(x, x', z, t, t') \delta \beta(x', z) dx' dz dt' \quad (23)$$

解式(23)可得  $\delta \beta(x, z)$ 。

#### 迭代过程

可选定初始值  $\delta \beta_0(x, z)$ , 经几步迭代的  $\delta \beta_n(x, z)$ , 在  $\beta(x, z) = \delta \beta(x, z)$  下, 由式(1)~(8)和式(14)~(21)正演得到  $u_{x,n}, u_{z,n}, w_{x,n}, w_{z,n}, \varphi_{x,n}, \varphi_{z,n}, \psi_{x,n}, \psi_{z,n}$ , 代入式(22)解此积分方程的  $\delta \beta_n(x, z)$ , 以得  $\delta \beta_{n+1}(x, z)$ , 构成一个迭代循环。

#### 正则化方法

由于式(23)是不稳定的, 这可通过正则化方法解之。基于 Tikhonov 正则化思想, 可采取较简单的离散后再正则化。对于积分方程(23), 先通过某种方法离散, 得到线性方程组

$$AF = B \quad (24)$$

其中  $F$  是由式(22)中  $\delta \beta_n(x, z)$  离散而成,  $A$  是由式(23)中核函数离散而成。由于式(23)是不稳定的, 表现为  $A$  是病态的, 可取正则解为

$$\min \| AF - B \|_2 + \alpha_L \| LF \|_2 \quad (25)$$

则

$$F = (A^T A + \alpha_L L^T L)^{-1} A^T B \quad (26)$$

其中:  $L$  为光滑化矩阵, 一般取单位矩阵即可;  $\alpha_L$  为正则化因子, 在理论上有很多确定方法<sup>[3], [4]</sup>, 这里可根据经验取一较小的正数。

#### 数值模拟及分析

为验证方法的可行性, 进行了数值模拟。地下介质结构如图 1 所示, 分为 3 层不同介质, 介质参数由表 1 给出。用平面波作入射波,

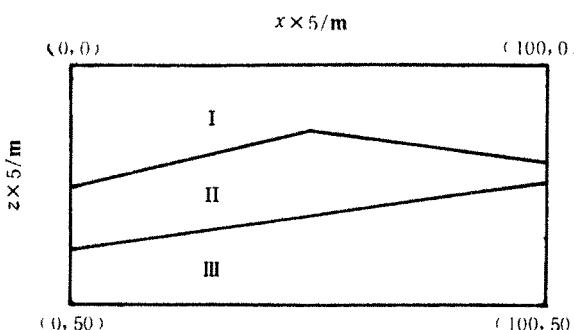


图 1 地层模型

正演数据由有限元方法生成,取 $\Delta x=\Delta z=5\text{m}$ , $\Delta t=0.00075\text{s}$ 。附加条件先由正演生成,然后选一初始值,用时卷积迭代方法反演;以考察近似解与真值的拟合程度。表2给出了时卷正则化迭代法5次迭代的数值模拟结果。

表1 模型介质参数表

参 数	层 序 号		
	I	II	III
$K_a/\text{Pa}$	$4.00 \times 10^{10}$	$2.50 \times 10^{10}$	$3.00 \times 10^{10}$
$\mu_a/\text{Pa}$	$3.00 \times 10^{10}$	$2.00 \times 10^{10}$	$2.50 \times 10^{10}$
$K_t/\text{Pa}$	$4.00 \times 10^{10}$	$2.40 \times 10^{10}$	$3.00 \times 10^9$
$\eta$	0.00	0.00	0.00
$K/\text{m}^2$	$1.00 \times 10^{-12}$	$1.00 \times 10^{-12}$	$1.00 \times 10^{-12}$
$\rho_s/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	3200.00	3000.00	3500.00
$\rho_t/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	1000.00	1000.00	1100.00

表2 地层孔隙率 $\beta$ 反演结果

层序号	$\beta$ 真值	$\beta$ 初值	5次迭代值
I	0.240 000 0	0.300 000 0	0.247 138 2
II	0.360 000 0	0.300 000 0	0.352 246 1
III	0.250 000 0	0.300 000 0	0.252 195 6

## 结 束 语

关于式(22)的求解,应对系数进行适当的消除和集中,以保证数值方法的有效性。

由于采取正则化方法保证了求解的稳定性,一般对精度有一定的影响,但也能够取得满意的结果。

由于二维模型及双相介质的特点,加之辅助边界脉冲源的响应方程的求解,因此计算机内存与机时成为主要问题。

双相介质模型是多参数反问题。多参数同时反演时,如果附加条件足够,用此方法反演同样有效,其迭代格式不难构造。

## 参 考 文 献

- 1 谢干权等. 二维波动方程PS波速的时卷正则迭代法. 地球物理学报, 1990, 33(专辑Ⅱ)
- 2 Nur Amos 等著, 许云译. 双相介质波的传播, 石油工业出版社, 1986, 144~174
- 3 刘家琦. 脉冲谱技术在地震勘探中的应用. 地球物理学报, 1990, 33(专辑Ⅱ)
- 4 吉洪诺夫 A H, 阿尔先宁 B R 著, 王秉忱译. 不适定问题的解法. 地质出版社, 1979