

图12 连续的分形压缩映射

$S_1$  与  $S_2$  的不变集的构造,它们把大椭圆  $E$  分别映射成椭圆  $S_1(E)$  和  $S_2(E)$ ; 集  $S^k(E) = U_{i=1,2} S_{i_1} \cdots S_{i_k}(E)$  给出了集  $F$  的越来越好的逼近

$$\sum_{i=1}^m C_i^S = 1 \quad (9)$$

式中  $C_i$  为各分段的压缩比。如图13的树状分形,它的“生成元”是由5段长度缩小  $1/3$  的线段所组成。因此有  $5 \times (1/3)^S = 1$ 。故解得  $S = \log 5 / \log 3 = 1.465$ 。又如图14的花边图形的生成元绘在最上端,它是横向三根  $1/3$  的线段与纵向两根  $1/4$  的竖线所组成。每次迭代,图形进一步变复杂,变到  $E_4$  就形成一个花边形状。它的维数可从式(9)出发,即  $3 \times (1/3)^S + 2 \times (1/4)^S = 1$  中解得  $S = 1.34$ 。

### 自仿射集

自仿射集可以组成另一类重要的分形集。实际上自相似集只是自仿射集的某些特例。仿射映射  $S: R^n \rightarrow R^n$  是具有下面形式的映射

$$S(X) = T(X) + B$$

其中:  $T$  是  $R^n$  上的线性变换算子,为一个  $n \times n$

阶矩阵,它具有图形旋转、胀缩变换的功能;  $B$  是  $R^n$  中的一个位移向量。于是仿射变换可包括平移、旋转、胀缩以及可能还有反射的组合。它可以把球映射成椭球,把正方形映射成平行四边形,变化万千。与相似映射的区别之处是仿射映射在不同的方向上可以具有不同的胀缩比。

图15是把一个正方形中的图形仿射成三个矩形图,这里既有压缩又有旋转及平移。图3中的羊齿叶及青草图案也是由仿射映射产生。

一个最普通的对于坐标点  $(x, y)$  的仿射变换可表示为

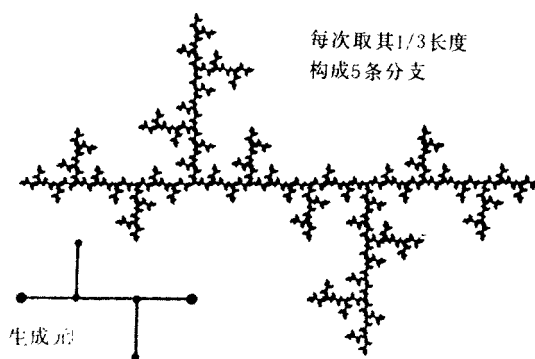


图13 树状分形与它的生成元

其豪斯道夫和盒维数等于  $\log 5 / \log 3 = 1.465$

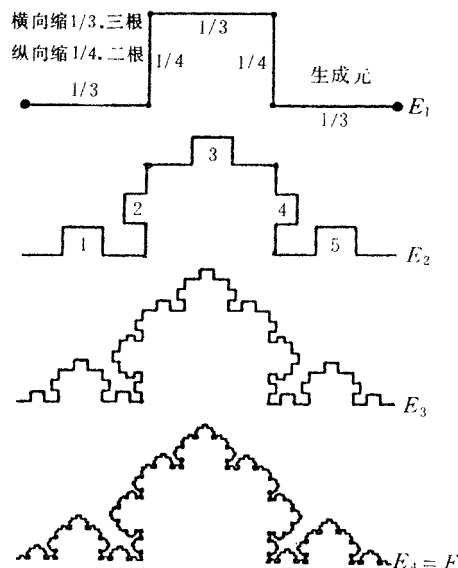


图14 由一个生成元构造分形曲线的几个阶段

生成元线段的长度分别为  $1/3, 1/4, 1/3, 1/4, 1/3$ ;  $F$  的豪斯道夫和盒维数由方程  $3(1/3)^S + 2(1/4)^S = 1$  给出,或者  $S = 1.34$