

# 加权平滑边界元法重力反演

毛小平\* 吴蓉元

(中国地质大学(武汉)物探系)

## 摘 要

毛小平, 吴蓉元. 加权平滑边界元法重力反演. 石油地球物理勘探, 1995, 30(4): 523~532

对于三度界面的重力反演, 应用边界元法(代数重建法 ART 解反演方程)求解时会出现边界振荡现象。本文分析了产生这一现象的原因, 提出用加权平滑方法来克服边界振荡现象, 并可加快迭代反演的收敛速度。理论和实测重力场的界面反演结果表明: 加权平滑边界元反演方法效果良好, 反演结果无边界振荡现象, 优于其它近似的迭代反演方法, 适用于实际生产。

主题词 重力反演 三度界面 反演方程 代数重建法 边界振荡 加权 平滑

## ABSTRACT

Mao Xiaoping and Wu Rongyuan. Gravity inversion using weight-smoothed boundary element method. *OGP*, 1995, 30(4): 523~532

Boundary vibration phenomenon occurs in solving the gravity inversion of 3-D interfaces with the use of boundary element method(solving the gravity inversion equation by algebraic reconstruction technique). The origin of boundary vibration phenomenon is analysed here. Weight smoothing can be used to remove the boundary vibration phenomenon and to cause fast convergence of iteration inversion. The inversion results of interfaces in both theoretical and real gravity fields show that the weight-smoothed boundary element method is better than other approximate iteration inversion methods and applies to practical work because it brings satisfactory inversion results without boundary vibration phenomenon.

**Subject heading:** gravity inversion, three-dimensional interface, inversion equation, algebraic reconstruction technique, boundary vibration, weight, smooth

## 引 言

用边界元法解重力反问题是一种直接反演方法。该方法无需任何假设条件, 可同时进行多层密度界面的反演。它首先由周熙襄教授提出, 并在二度体上实现<sup>[2]</sup>, 后由张建中完成了三度体反演的理论研究, 并作了初步的理论模型试验<sup>[3]</sup>。

\* Mao Xiaoping, Department of Geophysical Exploration, China Geology University, Wuhan City, Hubei Province, Post-code: 430074

本文于 1994 年 10 月 17 日收到, 修改稿于 1995 年 1 月 10 日收到。

边界元法是将重力的体积分方程转化为边界积分方程,然后将它线性化为一大型线性方程组,即反演方程,再通过解反演方程逐步迭代求解。

该方法对于二度体问题容易实现,因为其数据量小,解反演方程可用奇异值分解(SVD)法求得其广义解。此解对反演方程是准确的。但是,对于三度体界面的反演,由于存在未知数多、反演方程占的存储空间大等问题,用SVD方法不能解决问题,必须采用CT技术中的代数重建法(ART)求解。ART法解大型方程组很有效,它是通过多次迭代求得满足方程组的一个近似解。正因为是一个近似解,它与反演方程的准确解之间有一个误差 $\epsilon$ ,加上重力反问题解的非唯一性及ART算法迭代过程中独特的算法,使得用边界元法解三度重力反问题时会出现边界振荡现象、波及范围大,严重影响边界区域。也正是这个原因,使得迭代收敛速度很慢。由于重力问题的解的非唯一性和不稳定性,这个小的误差 $\epsilon$ 会造成很多组相距甚远的近似解均满足条件。引起边界振荡的一组解就是其中之一。本文针对这些问题进行讨论,并找出解决办法。

## 重力正演的解法

目前许多教科书及公开发表的文章还未见专门针对界面的重力正演问题作介绍。为了配合反演的实现,本文给出统一的层状密度模型的重力正演公式。

### 二度体单层界面

如图1所示,设计一参考平面 $R$ ,深度为 $h_0$ ,可将二度正问题写为

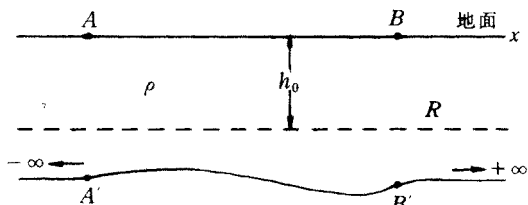


图1 二度体单层界面

$$\begin{aligned}\Delta g_i &= -G\rho \iiint \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{r} \right) dv \\ &= 2\pi G\rho - G\rho \int_s \frac{1}{r} \Big|_{h_0}^{h(x,y)} ds\end{aligned}\quad (1)$$

式中: $G$ 为万有引力常数; $\rho$ 为剩余密度; $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$ 为场源 $(x, y, z)$ 至测点 $(\xi, \eta, 0)$ 的距离; $h(x, y)$ 为点 $(x, y)$ 处的界面深度。考虑是二度体,则 $y$ 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ ,且 $h(x, y)$ 简化为 $h(x)$ ,有

$$\begin{aligned}\Delta g_i &= 2\pi G\rho + 2G\rho \left[ \int_{-\infty}^A \ln \frac{(\xi - x_i)^2 + h^2(x)}{(\xi - x_i)^2 + h_0^2} dx + \int_A^B \ln \frac{(\xi - x_i)^2 + h^2(x)}{(\xi - x_i)^2 + h_0^2} dx + \right. \\ &\quad \left. + \int_B^{\infty} \ln \frac{(\xi - x_i)^2 + h^2(x)}{(\xi - x_i)^2 + h_0^2} dx \right]\end{aligned}\quad (2)$$

其中各变量的含义同式(1),且

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^A \ln \frac{(\xi - x_i)^2 + h^2(x)}{(\xi - x_i)^2 + h_0^2} dx &= \frac{\pi}{2}(h_A - h_0) + \frac{1}{2}(x_A - x_i) \ln \frac{(x_A - x_0)^2 + h_A^2}{(x_A - x_0)^2 + h_0^2} + \\ &\quad + h_A \arctg \frac{x_A - x_i}{h_A} - h_0 \arctg \frac{x_A - x_i}{h_0}\end{aligned}$$

$$\int_B^{+\infty} \ln \frac{(\xi - x_i)^2 + h^2(x)}{(\xi - x_i)^2 + h_0^2} dx = \frac{\pi}{2}(h_B - h_0) + \frac{1}{2}(x_i - x_B) \ln \frac{(x_i - x_B)^2 + h_B^2}{(x_i - x_B)^2 + h_0^2} +$$

$$+ h_B \arctg \frac{x_i - x_B}{h_B} - h_0 \arctg \frac{x_i - x_B}{h_0}$$

而  $\int_A^B \ln \frac{(\xi - x_i)^2 + h^2(x)}{(\xi - x_i)^2 + h_0^2} dx$  可以用普通的数值积分法——龙格求积公式求得。 $\Delta g_i$  为地面观测点  $i(x_i, 0, 0)$  处的理论重力值,  $r$  为观测点至场源的距离,  $r = [(\xi - x_i)^2 + \eta^2]^{1/2}$ 。

### 三度体单层界面

由前述式(1)可将如图2所示的平面分为  $S_A, S_B, S_C, S_D$  及  $S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{AD}, S_{ABCD}$  共九个区。 $S_{ABCD}$  为测区, 其它为外延伸的无限边界面。于是有下列公式

$$S_{AB} = \iint_S \frac{1}{r} \Big|_{h_0}^{h(x)} dx dy = \int_{AB} \left[ \int_{-\infty}^{y_A} \frac{1}{r} \Big|_{h_0}^{h(x)} dy \right] dx$$

$$= \int_{AB} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y_A^2 + h_0^2} - y}{\sqrt{x^2 + y_A^2 + h^2} - y} dx$$

$$S_{CD} = \int_{CD} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y_C^2 + h_0^2} + y_C}{\sqrt{x^2 + y_C^2 + h^2} + y_C} dx$$

$$S_{AD} = \int_{AD} \ln \frac{\sqrt{x_A^2 + y^2 + h_0^2} - x_A}{\sqrt{x_A^2 + y^2 + h^2} - x_A} dy$$

$$S_{BC} = \int_{BC} \ln \frac{\sqrt{x_B^2 + y^2 + h_0^2} + x_B}{\sqrt{x_B^2 + y^2 + h^2} + x_B} dy$$

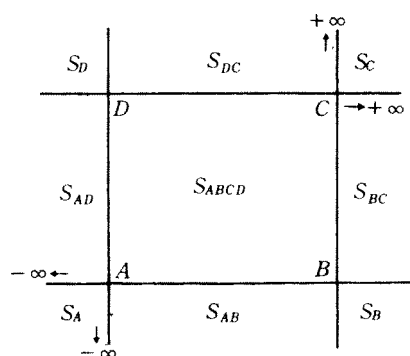


图2 三度重力正演积分范围

以上公式中  $x, y$  均以观测点为原点, 即  $x - x_i, y - y_i$ , 以下同。

$$S_A = \int_{-\infty}^{x_A} \int_{-\infty}^{y_A} \frac{1}{r} \Big|_{h_0}^{h(x)} dx dy$$

$$= \left| \left| \left| x \ln(y + r) + y \ln(x + r) + z \arctg \frac{zr}{xy} \right|_{-\infty}^{x_A} \right|_{-\infty}^{y_A} \right|_{h_0}^{h_A}$$

$S_B, S_C, S_D$  类推。最后得

$$S_{ABCD} = \iint_{S_{ABCD}} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + h_0^2}} \right] dx dy$$

其值可通过测区内平面数值积分方法求得。那么, 界面在第  $i$  点  $(x_i, y_i)$  处的重力值为

$$\Delta g_i = 2\pi G\rho - G\rho(S_A + S_B + S_C + S_D + S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + S_{DA} + S_{ABCD})$$

若是多层密度分界面, 公式同上。

## 边界元法重力反问题<sup>[2]</sup>

该方法在文献2中已有详细论述, 这里仅作简单介绍。

边界元法解重力反问题是将求解的体积分方程转化为面积分方程, 再经线性化变为线性

方程组。无论是二度体、三度体、单层界面还是多层界面均可以归纳为一个反演方程,即

$$F\delta H = \delta G \quad (3)$$

式中:  $\delta G = (\delta g_1, \delta g_2, \dots, \delta g_i)^T$ ,  $\delta g_i$  为第  $i$  个点的重力残差;  $\delta H = (\delta h_1, \delta h_2, \dots, \delta h_n)^T$  为待求向量,  $h_n$  表示第  $n$  个样点处深度修正值;  $F = \left( \frac{\partial g_i}{\partial h_j} \right) \Big|_{i=1, c}^{j=1, n}$  为雅可比矩阵, 它由面积分方程离散化以后进行单元分析而求得, 相当于导数矩阵, 第  $i$  行、 $j$  列反映了第  $j$  个样点处单位深度的变化引起地面观测点  $i$  点的重力变化。笔者以反演方程(3)为基础进行迭代求解, 具体迭代过程如下:

(1) 任意给一初始模型, 对单层界面的反演, 一般可设参考面  $\epsilon$  作为平界面模型。

(2) 对所设模型正演(给定密度差  $\Delta\rho$ )求得理论场  $\Delta g_i$ , 并与实测重力场相减, 得到重力残差  $\delta G$ 。

(3) 计算  $F$  矩阵<sup>[2]</sup>。

(4) 解线性方程组(反演方程)  $F\delta H = \delta G$ , 求得模型修正向量  $\delta H$ 。二度界面反演可采用 SVD 方法, 三度界面反演可采用 CT 技术中的 ART 算法。

(5) 修正原设计模型, 在原模型上加上  $\delta H$ , 以  $H_0 + \delta H$  作为新的模型, 以便于第(2)步正演。

(6) 判断残差  $\delta G$  的均值  $\|\delta G\|_2$  是否小于误差限, 若不满足精度要求, 则转向第(2)步, 继续用修改后的模型正演, 求重力残差  $\delta G$  等; 若满足要求, 则以这个经过多次迭代修改的模型  $H$  作为反演结果输出。

### 用 ART 方法解线性方程组<sup>[3]</sup>

考虑到三度体界面反演的未知数多, 矩阵  $F$  所占的储存空间大, 用普通的奇异值分解法很难实现, 故采用 CT 技术中的代数重建法(ART 方法)求解。

利用 ART 方法求解反演方程(3)是一个迭代过程, 它不是一个精确的求解过程。其迭代公式如下

$$\begin{cases} \delta h^0 = 0 \\ \delta h^{k+1} = \delta h^k + \alpha^k \frac{\delta g_i - (F_i, \delta h^k)}{\langle F_i, F_i \rangle} F_i^T \quad i = 1, 2, \dots, c \end{cases}$$

其中:  $\delta h^k$  是第  $k$  次迭代的近似解, 为深度修正量;  $\delta g_i$  为第  $i$  个观测点的重力残差;  $F_i$  为  $F$  矩阵的第  $i$  行元素向量;  $\langle *, * \rangle$  为内积形式;  $\alpha^k$  为第  $k$  次迭代的阻尼因子,  $0 < \alpha^k < 2$ ;  $(F_i, \delta h^k)$  为  $i$  行方向上第  $k$  次投影;  $\delta g_i - (F_i, \delta h^k)$  为投影误差, 除以  $\langle F_i, F_i \rangle$  后为投影误差的均值。当  $\|\delta h^k - \delta h^{k+1}\|_2$  达到精度要求时, 则停止迭代, 并以  $\delta h^{k+1}$  作为反演方程的解。与 SVD 方法相比, 其特色是每次迭代只用系数矩阵的一行元素, 所以用它可以解大型方程组, 解决三度反问题。

### ART 算法引出的问题及对策

从 ART 算法的应用效果可以看出: 由于雅可比矩阵和 ART 算法本身的特性及重力反问

题求解的不稳定性和非唯一性等原因,在有限迭代次数情况下,反演的密度界面会出现边界振荡且迭代收敛速度很慢的现象。

实际计算表明:振荡波及的范围至少两倍于平均深度,这样会造成大面积边界损失。对面积为  $20\text{km} \times 20\text{km}$  的测区界面反演,不仅每次迭代速度很慢,而且需要迭代几百次,时间虽长却仍消除不了边界振荡。若扩大测区,向外延拓重力场又不经济,因为三度反演稍增加一点面积就将成倍增加工作量,致使该方法很难用于实际重力资料处理。

#### ART 算法引起振荡的原因

我们以二度单层界面为例,其雅可比矩阵画成等值线图如图3所示,表示模型界面每个采样点  $j$  单位深度变化所引起的每个观测点  $i$  的重力变化,即  $F_{ij} = \partial g_i / \partial h_j$ 。图3中横坐标为样点号  $j$ , 界面  $AB$  段共有  $N(N=21)$  个采样点;纵坐标为地面观测点号  $i$ 。由于两个端点  $A$ 、 $B$  的影响不仅包括测区内的界面起伏影响,而且还包括  $(-\infty, x_A]$ ,  $[x_B, +\infty)$  两个半无限平面对某观测点  $i$  的影响,使其权系数很大,即  $\partial g_i / \partial h_1$ ,  $\partial g_i / \partial h_N$  的值很大。界面左端点深度  $h$  的变化所产生的影响  $F_i$  在  $i=1$  处最大,而对远离此点的影响衰减很慢。同样,右端点  $h_N$  对所有观测点也都有很大影响。而内部其它点呈主对角线优势,在  $F_{ij}$  处最大。随  $i$  距离  $j$  越远,  $F_{ij}$  衰减越快,且迅速趋近于零。

对三度体而言,其衰减速度呈  $1/r^3$  变化,此处,  $r$  为采样点(场源点)  $j$  与观测点  $i$  的距离。这些特征可从构造  $F$  矩阵的公式看出。图6为三度反演的雅可比矩阵某一行元素勾绘的等值线图,表示场源每点对地面某观测点的影响

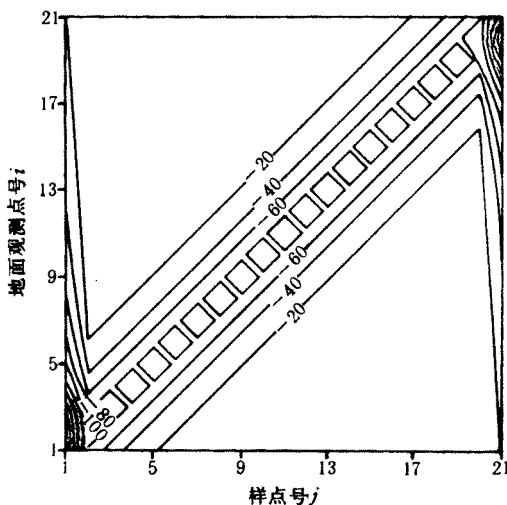


图3 二度单层界面的雅可比矩阵平面示意图

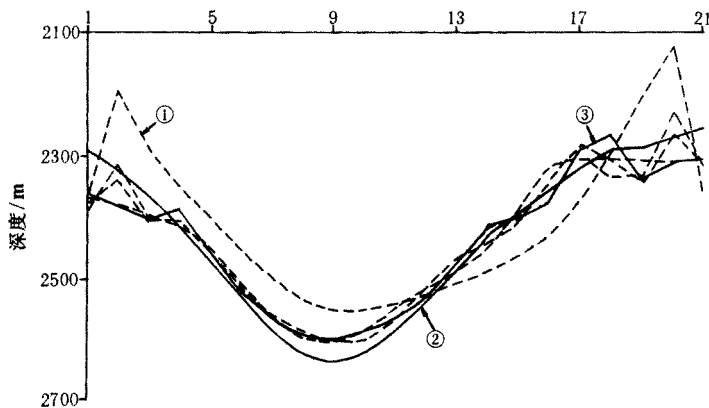


图4 二度单层界面的迭代反演过程(迭代很多次仍存在边界振荡)

曲线①为第60次迭代;曲线②为第300次迭代;曲线③为实际模型;其它曲线为不同迭代次数的结果

响力,以边界、四个角点及测点附近的影响最大。图4所示的剖面为不同次迭代的结果与真实模型的比较。因为ART算法以  $A_{ij}$  为权,将投影误差  $E_i = \delta g_i - \langle F_i, \delta h^t \rangle$  的均值  $E_i / \langle F_i, F_i \rangle$  按雅

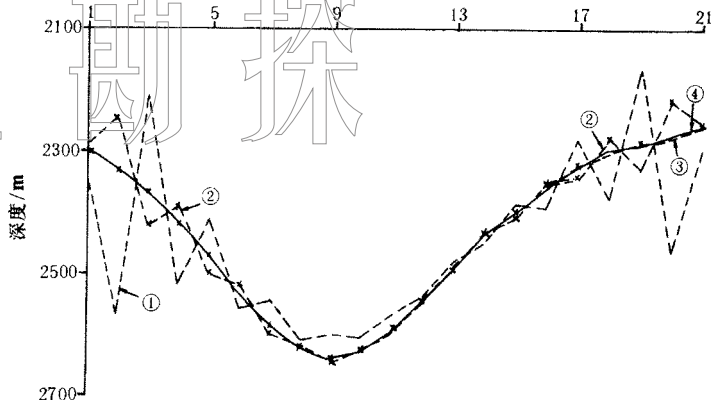


图 5 用奇异值分解(SVD)法解反演方程时的每次迭代情况

曲线①、②分别为迭代 20、40 次结果;曲线③、④分别为迭代 60 次结果 and 真实模型,这二者已很接近

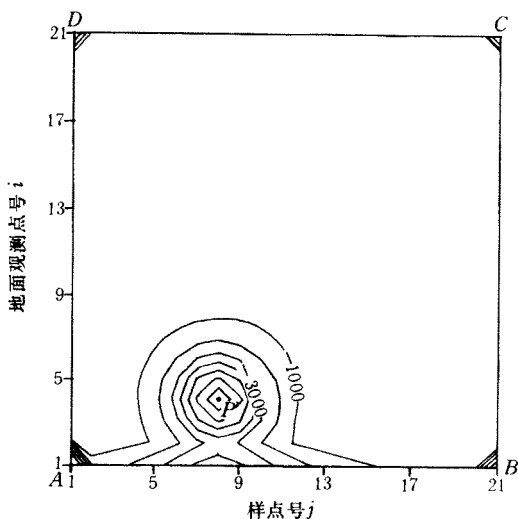


图 6 三度单层界面重力反问题的雅可比矩阵平面等值线图

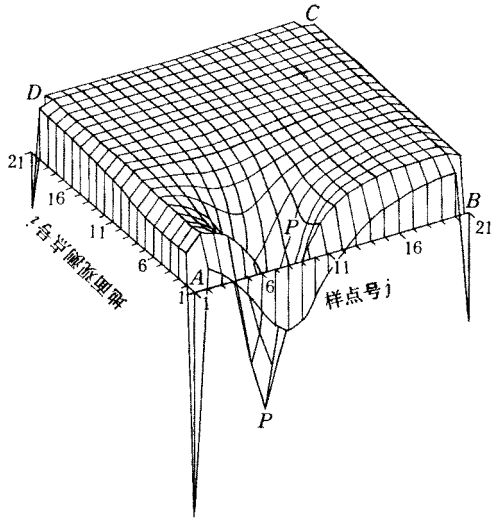


图 7 三度单层界面重力反问题的雅可比矩阵立体图

可比矩阵的元素  $F_{ij}$  为权反投影回  $\delta h^{k+1}$  (下面  $\delta h^{k+1}$  上角标忽略),  $\delta h_j$  与  $A_{ij}$  几乎成正比。  $F_{i1}$  和  $F_{iN}$  的值占绝对优势,那么,  $\delta h_1, \delta h_N$  也就很大,与  $\delta h_1, \delta h_N$  相邻的点则值小。这是第一次迭代,目标函数减小。

第二次迭代仍将剩余的投影误差按此权系数进行投影。由于每个测点的投影误差减小,在初始振荡的模型  $\delta h$  下,迭代便开始按边界错误的方向逼近另外一个目标。另一个按此算法的边界振荡解,同样在误差范围内能满足方程。这就是问题的关键所在,也是用迭代方法解反演方程的普遍问题,即很小的迭代误差对应着离差大的解空间。

如图 4 所示,即使迭代几百次,最终仍因迭代误差小、衰减慢,使得反演密度界面出现边界振荡而偏离实际模型较远。

在这个过程中,由于边界点与内部点之间的突变,且为满足反投影的要求,将突变传递到中间一些点,使反演结果在边界上呈正弦曲线状,但均在真解附近振荡,其质心很相近。振荡范



围一般为场源与观测点距离的2~4倍。

图5为奇异值分解(SVD)方法求解反演方程的迭代结果。经过迭代能很好地逼近真解,无边界振荡现象;但该方法对大型矩阵却无能为力,对三度或多层密度分界面的重力反问题需用ART算法才能求解。

### 解决办法

鉴于上述情况,我们采用一个阻尼因子,在每次迭代完成之后,对用ART方法求得的深度修正量为 $\delta H$ 的边界附近的点进行加权光滑,克服了因边界点的雅可比矩阵系数太大(突变)而造成的反投影突变。

对于解来说,我们往往隐含假设有一定的光滑度,这个加权因子使反投影突变变得光滑,使迭代过程逐步有约束地趋向于真解。当然,如果雅可比矩阵本身是奇异的(如多层密度界面),即反演具有多解性,那么边界光滑处理也近似地同最优化反演中解长度最小的约束一样,达到同样的效果。

对于二度剖面反演,每次迭代之后对近似解 $H_0 + \delta H$ 边界附近的点进行加权光滑;对三度体则采用平面加权光滑。它不同于普通的平滑方法,而是用平滑后的值与原解进行加权,平滑值仅占一个小的值 $\epsilon$ 。这样,迭代过程便扭转至正确的方向,且能加速收敛,而且得到的解并不因此项处理而变得比真解更为光滑。

具体作法是:对二度体剖面反演,除两端点之外,对内部靠边界的一些点的每次迭代的修正值作以下平滑处理,即

$$\delta h'_i = \delta h_i(1 - \epsilon) + \frac{\delta h_{i-1} + \delta h_{i+1}}{2}\epsilon$$

其中: $0 < \epsilon < 0.2$ ;  $i$  为内部点号。

对于三度界面反演,图6为雅可比矩阵的某一行元素绘制的平面图,反映平面上每个变元(深度样点的深度)对地面某一观测点的影响(权值),等值线极值点 $P$ 为测点位置。图7为图6对应的立体图,图中四个角点 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 的影响为 $1/4$ 无限平面对测点的影响,其值最大;四条边 $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$ 的影响为半无限条带,其值次之;内部点的影响最小。也就是说,雅可比矩阵系数包含两个突变台阶。

因此,加权平滑包括两项,一项是内部点采用平面九点公式加权光滑,削弱与四条边界的突变,光滑后的值以一个小值 $\epsilon$ 与原值 $(1-\epsilon)$ 加权平均作为下一次迭代初值。另一项是在四条边上进行曲线加权光滑,公式同二度界面反演。

## 模型试验及实际处理结果

图8为理论模型;图9为其正演结果(密度差 $\rho = 0.1 \text{ g/cm}^3$ );图10为未经任何处理的反演结果,与图8对比可知,边界出现了畸变,而中间的形态及深度很相近。图11为带加权平滑后的反演结果,与图8相近且无边界振荡现象。图11的正演结果与图9很接近,场的均方误差小于 $0.001 \text{ mGal}$ ,从数学上能达到完全的拟合。

该方法除了能避免边界振荡外,还能提高迭代收敛速度。对于上述模型,正常情况下要迭代近200次,而带加权平滑后的速度为70~80次。这一优点对大面积多层密度界面的反演意

义很大。

图 12 为某一测区(35km×37km)相对布格异常的源场资料,用  $\rho=0.12\text{g/cm}^3$  的密度差反演得到基底深度图,如图 13 所示。图中界面深浅层次清楚,无边界振荡现象。由实验结果可知,若不采取加权光滑,则东南角的凹陷显示不出来,若用 Parker 反演,此凹陷亦不明显,和异常相关性很大,误差也大。

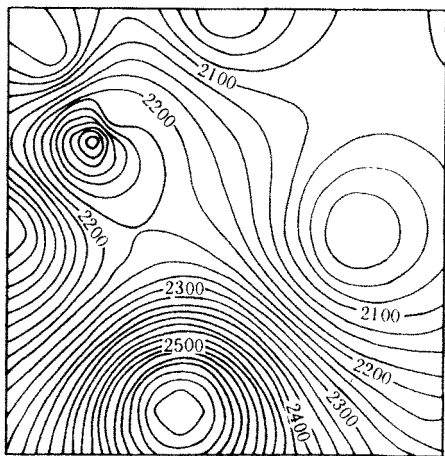


图 8 三度单层界面理论模型

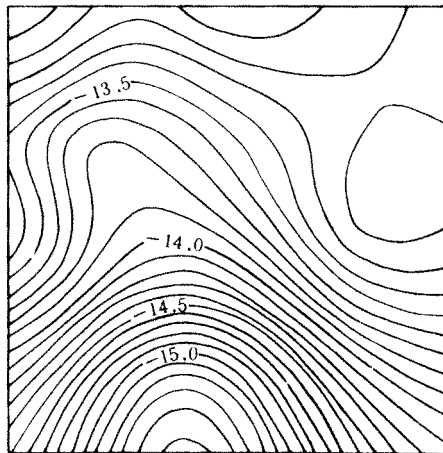


图 9 图 8 模型正演重力场

(相当于实测场  $\rho=0.1\text{g/cm}^3$ )

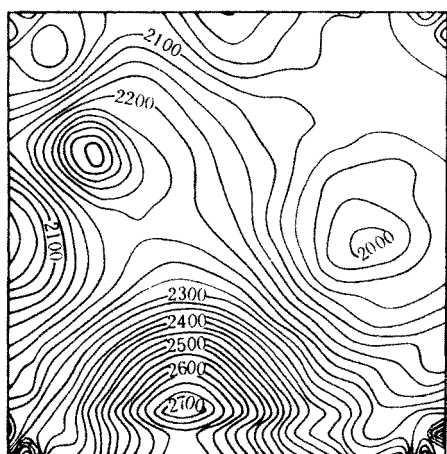


图 10 对图 9 进行重力边界元法反演(边界畸变大)

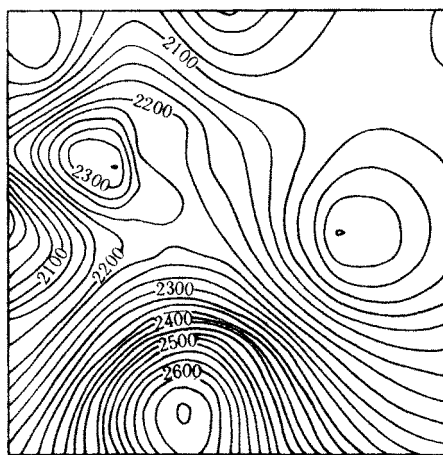


图 11 带加权平滑后的重力边界元法反演

## 结 论 与 建 议

(1) 本文给出了完整的层状密度分界面的重力正演算法,以利于重力边界元法的实现。

(2) 分析了 ART 算法迭代求解反演方程和重力反问题的非唯一性等共同作用所产生的边界振荡现象的原因和机制。

(3) 提出了带加权光滑的迭代反演过程,克服了边界振荡现象,大大提高了迭代收敛速度,使边界元法求解重力反问题真正走向了实用之路,成为目前最优的直接反演方法。



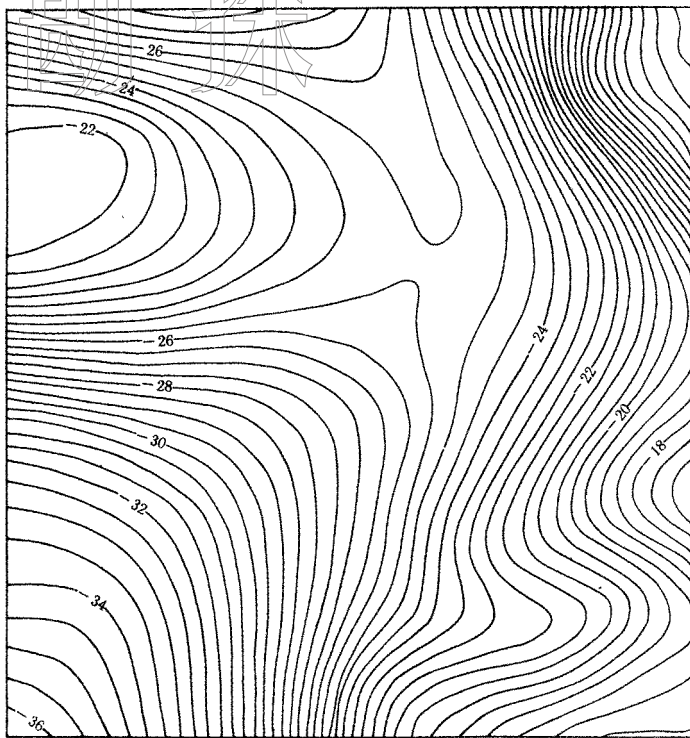


图 12 某工区相对布格重力异常分离出的深源场资料



图 13 用图 12 深源场进行带加权平滑的重力边界元法反演( $\rho=0.12\text{g}/\text{cm}^3$ )

我们在实际处理和理论研究中发现,多层反问题雅可比矩阵的条件数很高,即使是奇异的,反演得到的多层界面失真也很大。故建议采取单层反演,预先对测区的相对布格重力异常进行分场处理,再对分离后的场进行反演。

#### 参 考 文 献

- 1 王家林,王一新,万明浩.石油重磁解释.石油工业出版社,1991
- 2 周熙襄,张建中.用边界元法进行二维重力异常反演.物探化探计算技术,1989(1)
- 3 张建中.解重力反问题的边界元法.石油地球物理勘探,1993,28(5):603~613
- 4 骆循.ART 算法及其在地球物理反演中的应用.物探化探计算技术,1987,(9)

#### · 新书介绍 ·

### 《火山岩油藏描述》

本书是一本描述火山岩油藏的专著,由西北大学曲志浩、于庄敬、赵圣亮和张欣然等地质地球物理学家主编。全书是对位于河北省沧县望海寺乡境内的风化店火山岩油藏的描述和研究,介绍了三维地震资料解释与构造分析、火山岩的成因及岩相划分、火山岩储集体的测井描述、储层横向预测和综合描述、火山岩油藏注水开发效果分析、微观模型堵水实验及钻井综合数据库与图形软件设计,共九个部分。此书集地震、地质、测井、试油试采资料为一体,并在火山岩油藏描述中使用了许多新技术、新方向。本书对火山岩、碳酸盐岩及其它特殊岩性油藏地质研究有参考价值,其中有些方法具有普遍意义。

本书是在西北大学地质系与大港石油管理局勘探开发研究院合作完成“风化店中生界火山岩油藏描述”研究项目基础上编写的,因此它具有鲜明的针对性和实用性。可供从事油藏研究的地质、测井、物探、油田开发人员及有关高校石油地质勘探与开发专业的师生参考。

本书现已由西北大学出版社出版,定价 20.00 元。欲要此书的读者,可直接去函西北大学邮购。

邮购地址:陕西省西安市太白路西北大学地质系

联系人:赵圣亮 曲志浩

邮 编:710069