

# 非脉冲响应一维波动方程反演的求解方法

吴建成\* 石澄贤

(江苏石油化工学院)

## 摘 要

吴建成,石澄贤. 非脉冲响应一维波动方程反演的求解方法. 石油地球物理勘探,1994,29(3):376~381

为避免震源的不确定性及塑性形变的影响,本文讨论了非脉冲响应的一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( u(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

系数的反演问题。这一问题可化为积分方程求解。理论上,这是适定问题,但在应用上是不适定的。文中给出了正则化求解方法。理论计算表明,该方法得出的近似解较为稳定。

**主题词** 非脉冲响应 波动方程 反演 正则化方法

## ABSTRACT

Wu Jiancheng and Shi Chengxian. 1-D wave equation inversion method for non-pulse responses. *OGP*, 1994, 29(3): 376~381

The coefficient inversion problem of 1-D wave equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( u(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

for non pulse responses is discussed here so as to remove seismic source uncertainty and plastic strain influence. This problem can be achieved by solving for the corresponding integration equation. It is well posed theoretically but ill posed practically. Its regularization method is given here. Theoretical computation shows this method brings quite stable approximate solution.

**Subject heading:** non-pulse response, wave equation, inversion, regularization method

## 引 言

利用脉冲响应反演一维波动方程波阻抗,在地球物理勘探中具有重要的应用价值,因而受到人们的青睐。迄今已有多种求解方法<sup>[1]~[5]</sup>,并得出了重要的结论。本文旨在讨论非脉冲响应

\* Wu Jiancheng, Basic Curriculum Department, Jiangsu Petrochemical College, Postcode: 213016  
本文于 1993 年 6 月 15 日收到。

的一维波动方程系数反演问题。由于该问题不需要爆炸震源,在应用中可以避免震源的不确定性以及由塑性形变带来的影响<sup>[6]</sup>,因而无需对震源作各种近似处理<sup>[7]</sup>,且在同一条件下可反复进行信号拾取。在探测范围不太大的情况下,这种方法有着广阔的应用前景。

设在地面一点垂直地面施加的力为  $f(t)$ ,用仪器在该点同时接收的信号(位移)为  $g(t)$ 。在适当的条件下,利用这些数据反演地下介质的速度(波阻抗)可以简化为求函数  $\mu(x)$  和  $u(x,t)$ ,使其满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (x > 0, t > 0) \quad (1)$$

$$u(x, t) = 0 \quad (t \leq 0) \quad (2)$$

$$u(0, t) = g(t) \quad (t \geq 0, g(0) = 0) \quad (3)$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = f(t) \quad (t \geq 0) \quad (4)$$

其中  $\mu(0)$  为已知。当  $f(t)$  含有  $\delta(t)$  时,这属于利用脉冲信号反演波速的问题。文中我们假定  $f(t)$  是连续分布的。

本文将反问题(1)~(4)归结为积分方程,在适当的条件下可以证明解的唯一性和稳定性,但在应用中这个问题常常是不适定的。

## 积 分 方 程

记  $B(x) = \sqrt{\mu(x)}$ ,作变换

$$z = G(x) = \int_0^x \frac{ds}{B(s)} \quad (5)$$

并记  $v(z, t) = u(G^{-1}(z), t) = u(x, t)$ ,  $w(z, t) = \frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $q(z) = B'(x)$ ,则反问题式(1)~(4)等价于求  $q(z)$ 、 $v(z, t)$ ,并满足

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - q(z) \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (z > 0, t > 0) \quad (6)$$

$$v(z, t) = 0 \quad (t \leq 0) \quad (7)$$

$$v(0, t) = g(t) \quad (t \geq 0) \quad (8)$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial z} = B(0)f(t) \quad (t \geq 0) \quad (9)$$

一旦求出  $q(s)$ ,则  $x = G^{-1}(z)$  便可由下式给出,即

$$x = G^{-1}(z) = B(0) \int_0^z \exp \left[ \int_0^s q(\tau) d\tau \right] ds$$

从而  $B(x) = B(0) \exp \left[ \int_0^z q(s) ds \right]$ ,  $\mu(x)$ ,  $u(x, t)$  均可由反函数  $z = G(x)$  和  $v(z, t)$  确定。

利用特征线积分可把定解问题式(6)~式(8)表示为

$$v(z, t) = \begin{cases} g(t - z) + \int_0^{(t-z)/2} ds \int_{(t-z)/2}^{(t+z)/2} q(\eta - s) w(\eta - s, \eta + s) d\eta & (t \geq z) \\ 0 & (t < z) \end{cases} \quad (10)$$

将式(10)对  $z$  求导,并将条件(9)代入此式,可得

$$\int_0^{t/2} q(s)w(s, t-s)ds = B(0)f(t) + g'(t) \quad (11)$$

将式(11)代入  $v_z$  的表达式中, 可得

$$w(z, t) = H(t, z) - \frac{1}{2} \int_0^z q(\xi) [w(\xi, z+t-\xi) + w(\xi, t-z+\xi)] d\xi \quad t \geq z > 0 \quad (12)$$

其中

$$H(z, t) = \frac{1}{2} [B(0)f(z+t) + g'(z+t)] + \frac{1}{2} [B(0)f(t-z) - g'(t-z)]$$

由式(11)得  $g'(0) + B(0)f(0) = 0$ 。记  $p(z, t) = w(z, 2t-z)$ , 将式(11)中的  $t$  改为  $2z$ , 并对  $z$  求导, 式(12)对  $t$  求导, 可得关系式

$$\begin{aligned} p(z, z) &= \frac{1}{2} [B(0)f(0) - g'(0)] - \frac{1}{2} \int_0^z q(\xi) p(\xi, \xi) d\xi \\ &= B(0)f(0) \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^z q(s) ds \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$$p_t(z, t) = H_t(z, 2t-z) - \frac{1}{2} \int_0^z q(\xi) [p_t(\xi, t) + p_t(\xi, t-z+\xi)] d\xi \quad (14)$$

$$q(z)p(z, z) = 2[B(0)f'(2z) + g''(2z)] - 2 \int_0^z q(\xi) p_t(\xi, z) d\xi$$

或

$$\begin{aligned} q(z) &= \frac{2}{B(0)f(0)} \exp \left[ \frac{1}{2} \int_0^z q(s) ds \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[ B(0)f'(2z) + g'(2z) - \int_0^z q(\xi) p_t(\xi, z) d\xi \right] \end{aligned} \quad (15)$$

若  $f(0) \neq 0$ , 则方程(14)、(15)是关于  $q(z)$ 、 $p_t(z, t)$  的积分方程。利用压缩映像原理可以证明, 当  $f(t) \in C^1$ ,  $g(t) \in C^2$  时, 在一定范围内积分方程存在唯一解, 且关于  $f \in C^1$ 、 $g \in C^2$  是稳定的。

当  $f$ 、 $g$  具备上述条件时, 可直接由式(14)、(15)构造迭代格式, 或直接由方程(11)、(12)离散, 均可得到精度较高的数值解。

由于测量数据  $g(t)$  有误差及噪声干扰, 因此, 要获得连续的二阶导数是很困难的。当  $g(t)$  具有一阶导数时, 虽然可以直接求解方程(11), 但这是第一类方程, 数值求解很不稳定, 是不适定问题。表1给出了当  $f(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot$

$\sin(t + \frac{\pi}{4})$ ,  $g(t) = \sin(t)$  时, 直接求解方

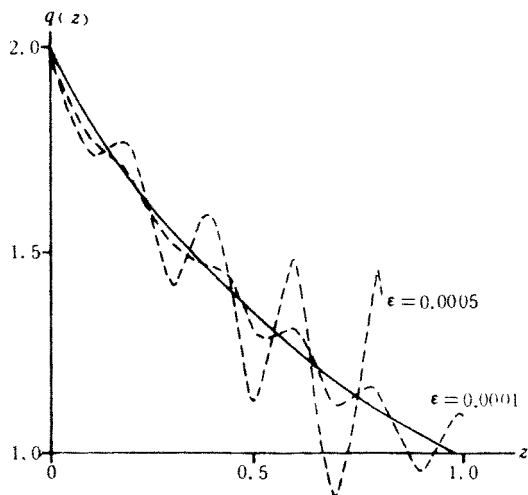


图1 数据  $g'(t)$  带有误差  $\epsilon$  时, 函数  $q(z)$  的反演结果  
实线为真解; 虚线为近似解

程(11)、(12)的计算结果。真解  $q(z) = \frac{2}{1+z}$ ,

$v(z,t)=\sin(t-z)/(1+z)$ 。表 2 给出了当  $g'(t)$  带有微小误差  $\epsilon$  时的反演结果。图 1 表明,当误差稍大时,解将激烈跳跃。

表 1 数据无误差时  $q(z)$  反演结果

$z$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$q^*(z)$	1.81818	1.66667	1.53846	1.42857	1.33333	1.25000	1.17647	1.11111	1.05263	1.00000
$q(z)$	1.81816	1.66670	1.53842	1.42861	1.33329	1.25003	1.17643	1.11116	1.05258	1.00007

注: $q^*(z)$  为精确解; $q(z)$  为近似解。

表 2 数据带有误差  $\epsilon$  时  $q(z)$  反演结果

$z$		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$q^*(z)$		1.818	1.667	1.538	1.428	1.333	1.250	1.176	1.111	1.052	1.000
$q(z)$	$\epsilon=0.00001$	1.811	1.672	1.530	1.439	1.321	1.265	1.159	1.134	1.029	1.031
	$\epsilon=0.0001$	1.798	1.689	1.508	1.466	1.287	1.307	1.110	1.192	0.959	1.112
	$\epsilon=0.0005$	1.738	1.767	1.409	1.589	1.136	1.491	0.889	1.454	0.652	1.470

注: $q^*(z)$  为精确解; $q(z)$  为近似解。

正则化求解方法

现定义算子  $A$  满足

$Aq = \int_0^z q(s)p(q(z),s,z)ds \quad q(z) \in [0,\bar{z}]$  (16)

记  $D(z)=B(0)f(2z)+g'(2z)$ ,则方程(11)、(12)可写为

$Aq(z) = D(z) \quad z \in [0,\bar{z}]$  (17)

$p(q,z,t) = H(z,2t-z) - \frac{1}{2} \int_0^z q(s) \cdot [p(q,s,t) + p(q,t-z+s)]ds$  (18)

$z \in [0,\bar{z}],t \in [0,2\bar{z}],$ 且  $z \leq t \leq 2\bar{z} - z$

假定  $f(t) \in L^2[0,2\bar{z}],g(t) \in w^{1,2}[0,2\bar{z}]$ ,则  $D(z) \in L^2[0,\bar{z}]$ , $A$  是  $C[0,\bar{z}]$  到  $L^2[0,\bar{z}]$  上的第一类连续算子。于是可按 A. N. Tikhonov 的正则化方法构造正则算子。

令

$\Omega[q] = \int_0^{\bar{z}} [p_0q^2(s) + p_1(dq/dz)^2]ds$  (19)

其中:函数  $p_0 \geq 0, p_1 > 0$ 。则  $\Omega[q]$  是  $w^{1,2}[0,\bar{z}] \subset C[0,\bar{z}]$  上的稳定泛函。

构造光滑泛函

$J_\alpha[q] = \|Aq - D(z)\|_{L^2[0,\bar{z}]}^2 + \alpha\Omega[q]$  (20)

定义算子  $R_\alpha(D(z))=q^\alpha$ ,其中  $q^\alpha$  是泛函  $J_\alpha[q]$  在  $w^{1,2}$  上的极小元,即

$J_\alpha[q^\alpha] = \inf_{q \in w^{1,2}} J_\alpha[q]$  (21)

则当  $\alpha > 0$ , 并以某一速度趋于零时,  $q^*$  趋于算子方程(17)的精确解  $q^T$ 。

为求泛函  $J_\alpha[q]$  的极小元, 作以下变分计算, 即

$$\delta J_\alpha[q] = 2 \int_0^{\bar{z}} [Aq - D(z)] \int_0^z [q(s) \delta p(q, s, z) + \delta q(s) p(q, s, z)] ds dz + \alpha \delta \Omega[q]$$

其中  $\delta p(q, s, z)$  满足

$$\begin{aligned} \delta p(q, z, t) = & -\frac{1}{2} \int_0^z \delta q(\eta) [p(q, \eta, t) + p(q, \eta, t - z + \eta)] d\eta - \\ & -\frac{1}{2} \int_0^z q(\eta) [\delta p(q, \eta, t) + \delta p(q, \eta, t - z + \eta)] d\eta \end{aligned} \quad (22)$$

设  $\delta p = \int_0^z R(z, t, \xi) \delta q(\xi) d\xi$ , 并代入方程(22), 得

$$\begin{aligned} R(z, t, \xi) = & -\frac{1}{2} [p(q, \xi, t) + p(q, \xi, t - z + \xi)] - \\ & -\frac{1}{2} \int_\xi^z q(\tau) [R(\tau, t, \xi) + R(\tau, t - z + \tau, \xi)] d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

故

$$\begin{aligned} \delta J[q] = & 2 \int_0^{\bar{z}} [Aq - D(z)] \int_0^z \delta q(\xi) \left[ p(q, \xi, z) + \int_\xi^z R(s, z, \xi) q(s) ds \right] d\xi dz + \\ & + 2\alpha \int_0^{\bar{z}} [p_0 q(\xi) - (p_1 q'(\xi))'] \delta q(\xi) d\xi + 2p_1 q'(z) \delta q(z) \Big|_0^{\bar{z}} \\ = & 2 \int_0^{\bar{z}} \delta q(\xi) \left\{ \int_\xi^z [Aq - D(z)] \left[ p(q, \xi, z) + \int_\xi^z R(s, z, \xi) q(s) ds \right] dz + \right. \\ & \left. + \alpha [p_0 q(\xi) - (p_1 q'(\xi))'] \right\} d\xi + 2\alpha p_1 q'(z) \delta q(z) \Big|_0^{\bar{z}} \end{aligned}$$

令  $\delta J[q] = 0$ , 得

$$\begin{aligned} \int_\xi^{\bar{z}} [Aq - D(z)] \left[ p(q, \xi, z) + \int_\xi^z R(s, z, \xi) q(s) ds \right] dz + \\ + \alpha [p_0 q(\xi) - (p_1 q'(\xi))'] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

其中:  $q(z)$  满足边界条件

$$q(0) = q_0 \quad q(\bar{z}) = q_1 \quad (25)$$

或

$$q'(0) = 0 \quad q'(\bar{z}) = 0 \quad (26)$$

或它们的混合形式。

于是, 求解  $q(z)$  的问题便归结为求解方程(18)、(23)、(24), 并使其满足边界条件式(25)或式(26)的问题。

表 3 给出了  $g'(t)$  带有微小误差  $\epsilon = 0.01$  时的部分反演结果, 正则参数  $\alpha = 0.005$ 。

由图 2 可以看出, 此时的近似解是比较稳定的。

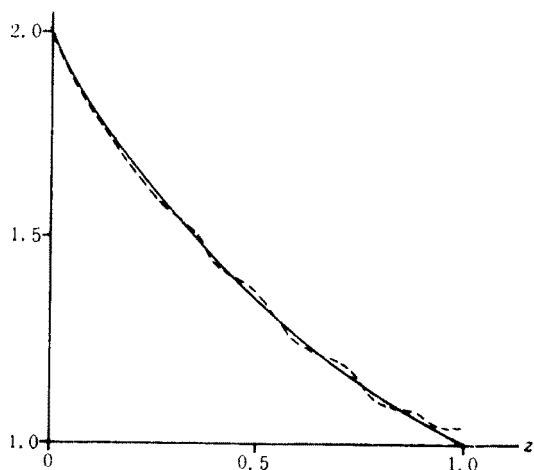


图 2 数据带有误差 ( $\epsilon = 0.01$ ), 正则因子  $\alpha = 0.005$  时函数  $q(z)$  的反演结果  
实线为真解, 虚线为近似解

表 3 数据带有误差( $\epsilon=0.01$ )时用正则化方法反演  $q(z)$  的结果

$z$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$q^*(z)$	1.818	1.667	1.538	1.428	1.333	1.250	1.176	1.111	1.052	1.000
$q(z)$	1.817	1.666	1.542	1.422	1.340	1.241	1.184	1.090	1.068	1.036

注: $q(z)$ 满足  $q(0)=2, q'(1)=0; \alpha=0.005$ 。

结 束 语

本文将非脉冲响应一维波动方程系数反演问题化为积分方程,并利用正则化方法求解,所得的近似解结果趋近于精确解,而且比较稳定,即使测量数据带有误差和噪声干扰,也不会出现不适定问题。

参 考 文 献

1 Xie G Q. A new iterative method for solving the coefficient inverse problem of the wave equation. *Comm Pure, Appl Math*, 1986, Vol. XXX I X, 307~322  
2 Xie G Q, Li J H, Chen Y M. Gauss-Newton-regularizing method for solving coefficient inverse problem of partial differential equation and its convergence. *J Comput Math*, 1987, 5(1): 38~49  
3 Jan-Inn H. Solution to the inverse problem of 1-D wave equation. *J Math Phys*, 1989, 3  
4 张关泉. 一维波动方程的反演问题. 中国科学(A), 1988, 7  
5 谢干权. 声波方程系数逆演问题的非线性积分方程及时征迭代法. 中国科学(A), 1988, 12  
6 陆基孟等. 地震勘探原理及资料解释, 石油工业出版社, 1991  
7 张霖斌等. 有限差分波动方程正演模拟震源处理. 石油地球物理勘探, 1993, 28(1): 46~50  
8 Tikhonov A N, Arsenin V Y. *On the solution of ill-posed problem*, John Wiley and Sons, New York, 1977

· 新书介绍 ·

《复杂地表地区勘探实例》

自 80 年代以来,我国相继引进了许多国外先进的技术和装备,使得我国的地震队能够在以往视为地震勘探“禁区”的地区,如大沙漠、滩海水陆过渡带、黄土塬、沼泽、江河水网、城镇等复杂地表条件下,开展地震勘探工作,获得了高质量的地震资料,推动了塔里木盆地、准噶尔盆地、沿海滩涂等区域的石油资源开发。本书全面总结了上述复杂地表区域的地震勘探方法,可为类似地区开展地震勘探提供借鉴,也可作为有关大专院校师生的教学参考资料。全书约 30 万字,由中国石油天然气总公司张德忠高级工程师主编。本书即将由石油工业出版社出版(预计今年第三季度出版)。有欲购者,请立即和石油工业出版社联系。