

石油地球物理勘探

有限元矩量法三维位场曲面延拓

李家康*

(石油勘探开发科学研究院地球物理所)

摘要

李家康. 有限元矩量法三维位场曲面延拓.《石油地球物理勘探》,1992,27(4):482~492

针对三维曲面延拓在高精度数据处理与解释中的重要性和实现的困难性,本文提出了有限元矩量法(FEMM)曲面延拓算法。首先采用等参元有限单元剖分最小二乘矩量法将延拓方程离散化成大型实满矛盾方程组,然后用共轭梯度法求解。这种算法可直接利用起伏观测面上的不规则网数据,既可作向上延拓,也可以完成向下延拓曲化平。其精度、分辨率和保真性大大高于现有的其它方法。按照本算法编制的程序使用方便,能适应各种复杂观测条件,在各类计算机上运行。对模型数据与野外资料的处理结果,证明了这种算法的有效性与实用性。

主题词: 延拓方程 有限元 剖分 分辨率

ABSTRACT

Li Jiakang. Curved surface continuation of three-dimensional potential field data by using finite element moment method. OGP, 1992, 27(4):482~492

In view of the fact that three-dimensional curved surface continuation is of significance to accurate processing and interpretation of magnetic data, but remains difficult to achieve, I propose curved surface continuation technique using finite element moment method. I use isoparametric finite element dissection and least square moment method to perform discretization of continuation equation into real full inconsistent equation system, which is then solved by using conjugate gradient method. This technique can be directly used in upward and downward continuations of potential field data in an irregular observation grid on an undulating surface, with potential field data reduced to a horizontal plane in downward continuation. The technique brings higher accuracy, clearer resolution and better fidelity than others do. The program can be conveniently applicable for data processings in various complex conditions and works on various computers regardless of their sizes. The processings of model data and real data prove this technique effective and practical.

Subject heading: continuation equation, finite element, dissection, resolution

* Geophysical Research Institute, Science Academy of Oil Exploration and Development, No. 20 College Road, Beijing City, Internal Postcode: 100083
本文于1991年9月23日收到。

前言

近年来,许多勘探工作已移至丘陵和山区,地面重力、磁力观测多在起伏不平的地表上进行。而航空磁测观测面由于垂直气流的影响常呈剧烈起伏,甚至间断,同时其航迹也是折曲的不规则网。为了消除曲面观测对反演解释带来的不利影响,曲化平工作历来受到位场工作者的高度重视,并已发表了大量文献^{[1]~[28]}。但到目前为止,所发表的众多方法都需要对不规则网的观测数据预先作网格化处理。遗憾的是,流行的网格化算法均方差有时高达 $6\text{nT}^{[29]}$, 在预处理阶段已使精度严重降低, 难以保证整个处理工作的精度要求。况且这些曲化平算法本身的精度也与 2nT 的高精度野外观测数据精度不协调。

本文描述了一种高保真曲面延拓的通用方法。按本算法编写的程序已成功地在数种计算机上运行。

曲面延拓方程

设位场观测场量为 $\Phi_0(x, y, z)$, 其延拓问题满足 Laplace 方程 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \\ \Phi|_S = \Phi_0 \\ \Phi = 0 \quad \text{当 } z \rightarrow \infty \text{ 或 } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1)$$

按照位场理论,式(1)的解可用偶层位函数表达为

$$\Phi = \iint_{S'} J \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}_0}{r^3} dS' \quad (2)$$

式中: S' 为偶层曲面; J 为偶层强度函数; \mathbf{u}_0 为偶极方向; \mathbf{r} 为偶层源点与场点间的距离矢量。

为便于计算,须将式(2)的曲面积分化为二重累次积分形式

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & \iint_{S'_0} J(x', y', z') X \frac{(x - x')\cos A_0 + (y - y')\cos B_0 (z - z')\cos C_0}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \times \\ & \times \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial y'}\right)^2} dx' dy' \end{aligned} \quad (3)$$

此处, S'_0 为曲面 S' 在 $x' - y'$ 平面上的投影; $\cos A_0, \cos B_0, \cos C_0$ 分别为 \mathbf{u}_0 在 x', y', z' 三个方向上的方向余弦,即 $\mathbf{u}_0 = (\cos A_0, \cos B_0, \cos C_0)$ 。式(3)可简记为

$$\iint_{S'_0} J(x', y', z') \cdot K(x - x', y - y', z - z') dx' dy' = \Phi(x, y, z) \quad (4)$$

式(4)规定了场函数 Φ 与偶层强度函数 J 以及反映偶层源与场空间关系的核函数 K 三者间的关系。若偶层位置与极化方向已确定,则有:

- ①如偶层强度可知,则空间任一点的场 Φ 可直接算得;
- ②如观测场 Φ 已知,则解此积分方程可求得偶层强度,再按步骤①算得延拓场。

物理勘探

有限元矩量法原理

为了进行曲面延拓,特别是为了提高分辨率进行场的向下延拓,必须通过解积分方程求得等效源偶层强度。

为书写方便,今后用算子 L 表示积分运算,用 J 表示偶层强度,而用 Φ 表示场量。这样,式(4)可用算子方程予以描述

$$L(J) = \Phi \quad (5)$$

若用近似函数 \tilde{J} 替代 J ,则式(5)等号不会严格成立。但通过选取适当的权函数 W_i 可使目标函数

$$\int_V W_i L(\tilde{J}) dV = \int_V W_i \Phi dV \quad (6)$$

成立。式(6)即是矩量法基本公式。

目标函数中的未知函数 \tilde{J} 可用级数展开。该级数由选定的彼此线性无关的基函数簇组成。近似解的收敛性、稳定性以及所需计算量都与所取的基函数有关。将未知函数的展开式

$$\tilde{J} = \sum_{j=1}^n N_j J_j \quad (7)$$

代入式(6),并考虑 L 是线性算子,从而有

$$\sum_{j=1}^n J_j \int_V W_i L(N_j) dV = \int_V W_i \Phi dV \quad (8)$$

利用记号

$$\begin{aligned} \int_V W_i L(N_j) dV &\equiv \langle W_i, L(N_j) \rangle \\ \int_V W_i \Phi dV &\equiv \langle W_i, \Phi \rangle \end{aligned} \quad (9)$$

于是,式(8)可写成

$$\sum_{j=1}^n J_j \langle W_i, L(N_j) \rangle = \langle W_i, \Phi \rangle \quad i = 1, \dots, m \quad (10)$$

用矩阵表示,即为

$$[K][J] = [\Phi] \quad (11)$$

这里的

$$K_{ij} = \langle W_i, L(N_j) \rangle \quad (11a)$$

$$J_j = J_j \quad (11b)$$

$$\Phi_i = \langle W_i, \Phi \rangle \quad (11c)$$

这样,通过矩量法就将积分方程(4)转化成式(11)所示的线性代数方程组。在选定权函数 W_i 和基函数 N_j 的基础上就可计算 $[K]$ 和 $[\Phi]$ 中的各个元素,进一步可解出未知函数 $[J]$ 。

根据权函数类型的选取可得各种不同形式的矩量法,如点匹配法,子域匹配法,迦辽金法,以及最小二乘法。不管用哪一种矩量法,矩阵方程(11)中各元素的计算都与基函数的选择密切相关。

由于曲面延拓问题面对的是具有复杂形态的连续参数场,因此选用既保证偶层面形状和偶层强度连续性又便于计算的基函数就成为提高延拓精度的关键。为此,本文采用等参元有限单元剖分方式。

所谓等参元就是将未知函数按可以确知的单元形状函数展开,即视未知函数的变化规律与单元形状函数变化规律一样。这样,用等参元有限元矩量法就把一个无限维连续分布参数系统近似地转化成线性有限维代数系统,既便于计算机计算,又较好地反映系统的性能。特别是,改变逼近度只要更换基函数,而整个计算格式可以不变。

如果采用点匹配法,即基函数和权函数都选用 δ 函数,则式(11)就演化成 Damphey (1969)^[3] 的方法。如果采用子域匹配法,即基函数选用阶梯函数,权函数用 δ 函数,则式(11)就演化成 Bhattacharyya 等(1977)^[11] 和 Hansen 等(1984)^[13] 的格式。简言之,点匹配法相当于简单地强迫余量在域内 n 个点上等于零,子域匹配法的实质是强迫余量在 n 个子域 Ω_j 上的积分为零。另一方面,从参数角度考虑,点匹配法相当于点源法即集中参数;而子域匹配法则限定在子域 Ω_j 上参数为常值。为了更精确地逼近真实场与物性参数,现在让我们考虑参数是连续变化的,即分布式参数。由于这里采用数值计算,所以很自然地引入有限单元剖分方式,它可以各种逼近度实现不同精度的近似。

由于向下延拓是典型的不适定问题,因而包含下延的三维曲面延拓矩量方程形成的通常是高阶病态方程组。本文使用等参元有限单元剖分更换基函数的办法,提高了逼近度、改善了条件数。与此同时,还利用线性变换与最小二乘技术来进一步提高稳定性、减小计算量,并使之能直接适用于不规则测网。

下面以 4 结点双线性插值矩形单元为例,具体说明等参元有限单元剖分矩量法进行三维曲面延拓的计算方法。

首先,确定等效源偶层面。由于这里所说的曲化平不仅意味着化到观测面最高点之上的某平面,而且可以化到观测面之下的某平面。因此须将偶层面置于观测面下方的一定位置上,如杜维本^[24]、Hansen 等^[13] 和侯重初等^[27] 曾做过的工作。这种“解耦”形成的偶层面,较观测面光滑、规则、面积稍大。由于褶积积分是对偶层面进行的,所以这不仅有利于整体计算精度,而且提高了边部处理精度,同时也减小了分块处理时的重叠面积,提高了计算效率。

其次,进行单元剖分,将偶层面剖分成若干个单元和相应结点。先确定单元形式,比如采用矩形单元,划分出 n 个单元 N 个结点,各结点的坐标由偶层面放置位置确定。这样式(3)即成为

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{j=1}^n \iint_{S_{\Omega_j}} J_j(x', y', z') \cdot K_j(x - x', y - y', z - z') dx' dy' \quad (12)$$

场函数 Φ 由对 n 个子单元域作积分再求和来获得。于是,整个问题的关键就是对各单元的积分。

第三,作单元分析。按剖分的单元形式和插值方式考虑单元积分

$$\iint_{S_0} J^{(e)}(x', y', z') \cdot K^{(e)}(x - x', y - y', z - z') dx' dy' \quad (13)$$

假定采用矩形单元双线性插值,即单元有4个结点,单元任一点的值可由这4个结点的值作双线性插值来获得,即

$$z' = c_1 + c_2 x' + c_3 y' + c_4 x' y' \quad (14)$$

为便于计算,先作线性变换

$$\xi = \frac{x' - x'_0}{2\Delta x'} \quad \eta = \frac{y' - y'_0}{2\Delta y'} \quad (15)$$

式中的 x'_0 与 y'_0 分别是矩形单元中心坐标, $\Delta x'$ 与 $\Delta y'$ 分别为单元半宽度。这样就将整体坐标下任意大小的矩形转换成规范化正方形 $\xi, \eta \in [-1, 1]$, 其上的形状函数为

$$\begin{aligned} z'(\xi, \eta) = & \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)z'_1 + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)z'_2 + \\ & + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)z'_3 + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)z'_4 \end{aligned} \quad (16)$$

单元内任一点的 z' 即由单元4个角点的高度值 $z'_l (l=1, 2, 3, 4)$ 确定了。由此可知, $K^{(e)}$ 已是一个用插值函数表达的完全确知的连续函数了。

下面考虑未知参量 $J^{(e)}$ 。由于采用等参元, $J^{(e)}$ 的变化规律也可用式(16)表达的由4个角点的 $J_l^{(e)} (l=1, 2, 3, 4)$ 双线性组合而成, 即

$$\begin{aligned} J^{(e)}(\xi, \eta) = & \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)J_1^{(e)} + \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)J_2^{(e)} + \\ & + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)J_3^{(e)} + \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)J_4^{(e)} \end{aligned} \quad (17)$$

这样就将未知的连续变量 $J^{(e)}$ 化归为单元结点未知量的线性组合。

将式(17)代入式(13), 可得按单元角点标号分割的4个子积分和

$$\sum_{l=1}^4 \left[\iint_{S_{0j}} f_l(\xi, \eta) \cdot K^{(e)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] J_l^{(e)} \quad (18)$$

其中

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ f_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \\ f_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ f_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \end{cases} \quad (19)$$

式(18)方括号内的积分可以写成更一般的形式

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

以便于采用数值积分。利用具有最高代数精确度的高斯积分是适宜的。对4结点矩形单元可以用 2×2 阶积分。此时高斯积分的权因子 $W=1.0$, 实际上可省去该次乘法。积分仅是

按积分点位置($\xi, \eta = \pm 0.577$)计算被积函数值再求和

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(\xi_i, \eta_j) \quad (20)$$

计算量可以最省。

从而,第 j 个单元对第 i 个观测点的积分关系就变成只有4个权系数与未知量的代数关系

$$\sum_{l=1}^4 K_l^{(j)} \cdot J_l^{(j)} = \Phi_i \quad (21)$$

按照第 j 单元的4个角点在整个偶层面上的结点总体编号,可以把式(21)写成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \cdots K_{ij_1} \cdots K_{ij_2} \cdots K_{ij_3} \cdots K_{ij_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ J_{j_1} \\ \vdots \\ J_{j_2} \\ \vdots \\ J_{j_3} \\ \vdots \\ J_{j_4} \end{bmatrix} = [\Phi_i] \quad (22)$$

式中的 j_1, j_2, j_3, j_4 表示第 j 单元角点的总体编号。

第四,总体合成。由于绝大部分结点都跨接多个单元,因此须对式(22)按对号入座、累加合成的办法将所有 K_{ij} 全部累加形成最终系数元素 K_{ij} 。于是,对有 M 个观测值、偶层面划分成 N 个结点的问题而言,就得到 $M \times N$ 维的线性代数方程组

$$\sum_{j=1}^N K_{ij} \cdot J_j = \Phi_i \quad i = 1, \dots, M \quad (23)$$

如果采用其它形式的单元划分与插值形式,只要修改相应的步骤,主要是单元分析中的有关公式即可,整个计算格式不变。

广义共轭梯度法

对包含下延的三维曲面延拓问题,式(11)所形成的矩量方程通常是高阶、实满、病态的最小二乘方程组。解最小二乘线性方程组的方法中处理正则方程的 Cholesky 分解法或阻尼最小二乘法和直接处理原始方程的 SVD 法或直交化法均是常被推荐的两类流行算法。虽然前者计算量小,但对大型、病态方程组往往失效;而后者则因占用太多的计算机资源和计算时间,限制了这类算法在三维曲面延拓问题上的应用。为此,本文使用了直接处理最小二乘方程组的广义共轭梯度法。它具备收敛快、稳定性好、精度高等明显优点,而且本质上它是一种行迭代,可以直接应用小内存计算机以及向量机。

对形如

$$K \cdot J = \Phi$$

的最小二乘方程组,广义共轭梯度法算法如下。

选择 $J^{(0)}$, 一般可令 $J^{(0)}=0$, 并计算

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= \Phi - KJ^{(0)} \\ r^{(0)} &= P^{(0)} = K^T f^{(0)} \\ q^{(0)} &= KP^{(0)} \end{aligned}$$

对于 $i=0,1,2,\dots$, 计算

$$\begin{aligned} \alpha^{(i+1)} &= \frac{(r^{(i)}, r^{(i)})}{(q^{(i)}, q^{(i)})} \\ J^{(i+1)} &= J^{(i)} + \alpha^{(i+1)} P^{(i)} \\ f^{(i+1)} &= f^{(i)} - \alpha^{(i+1)} q^{(i)} \\ r^{(i+1)} &= K^T f^{(i+1)} \\ \beta^{(i+1)} &= \frac{(r^{(i+1)}, r^{(i+1)})}{(r^{(i)}, r^{(i)})} \\ P^{(i+1)} &= r^{(i+1)} + \beta^{(i+1)} P^{(i)} \\ q^{(i+1)} &= KP^{(i+1)} \end{aligned}$$

这种算法避免了直接计算法方程 $K^T K$, 而是先计算 $\Phi - KJ$, 然后用 K^T 乘。

共轭梯度法较之奇异值分解法和直交化法的优越之处是仅用很少的迭代之后就常可找到问题较好的答案。通常对有 n 个未知量的问题, 迭代次数不超过 $n/3$ 。例如, 对包含下延问题的 3000×400 阶的大型、满阵的病态矛盾方程组, 仅需迭代 $30 \sim 80$ 次, 即可得到令人满意的结果。

在上述算法里, 每次迭代要分析二次 K 的信息去计算 KP 与 $K^T f$ 。当内存容不下 K 时, 使用外存须调二次 K 。因而对于小内存计算机, 可以使用下述方法来提高效率:

选取 $J^{(0)}$, 令 $P^{(0)}=r^{(0)}=K^T(\Phi-KJ)$ 。

对于 $i=0,1,2,\dots$, 作

$$\begin{aligned} \alpha^{(i)} &= \frac{(r^{(i)}, r^{(i)})}{(P^{(i)}, K^T K P^{(i)})} \\ J^{(i+1)} &= J^{(i)} + \alpha^{(i)} P^{(i)} \\ r^{(i+1)} &= r^{(i)} - \alpha^{(i)} K^T P^{(i)} \\ \beta^{(i)} &= \frac{(r^{(i+1)}, r^{(i+1)})}{(r^{(i)}, r^{(i)})} \\ P^{(i+1)} &= r^{(i+1)} + \beta^{(i)} P^{(i)} \end{aligned}$$

这个计算格式与先建立方程再使用经典共轭梯度法的格式, 表面上看非常相似, 关键在于如何计算 $K^T P^{(i)}$ 。

按行存 K , 取出一行与 $P^{(i)}$ 相应分量相乘累加得出 $KP^{(i)}$ 的某一个分量, 然后将所得分量乘上已取出的该行的每一个元素, 并且分别累加到 $K^T K P^{(i)}$ 的相应结果单元中。

实 例

为便于与前人结果对比, 笔者仍然选用了 Bhattacharyya 和 Chan (1977)^[1] 的模型。地形最高点为 -5.3 单位, 最低点为 1.7 单位, 高差为 7.0 单位。观测网为 27×27 的等距

理论推算

表1 3个立方体场源的有关参数

源体号	源体角坐标						磁化强度 10^{-3} A/m	磁倾角/(°)	磁偏角/(°)
	x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	z_2			
I	-8	-3	-4	8	2	7	17000	30 N	45 W
II	0	5	0	7	3	7	34000	72 N	5 E
III	4	8	-9	-3	2	7	20000	60 N	10 E

方网,间距为2个单位。场源是3个立方体,参数如表1所示。模型观测面等值线与场源分布见图1,模型的人工合成场见图2。

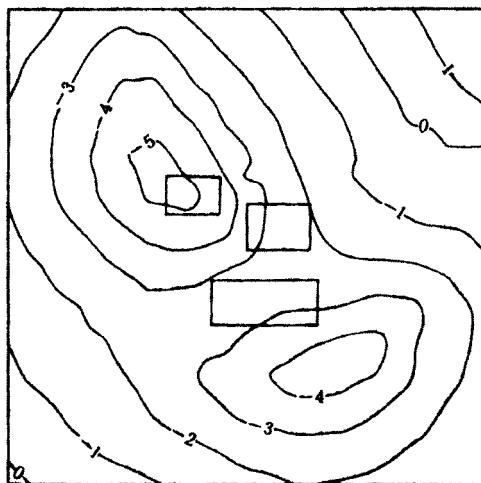


图1 模型观测面高程与场源分布
等值线为高程;方块为场源

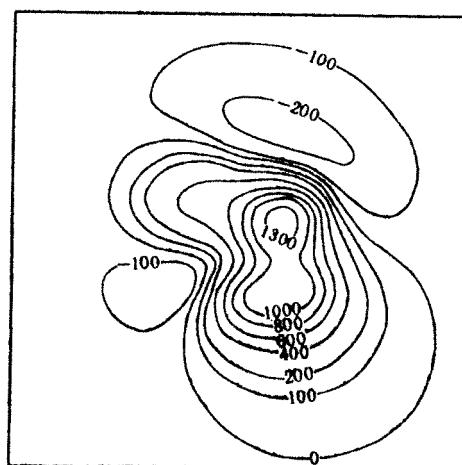
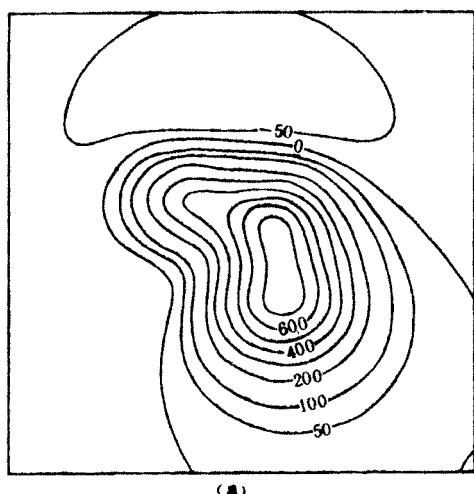
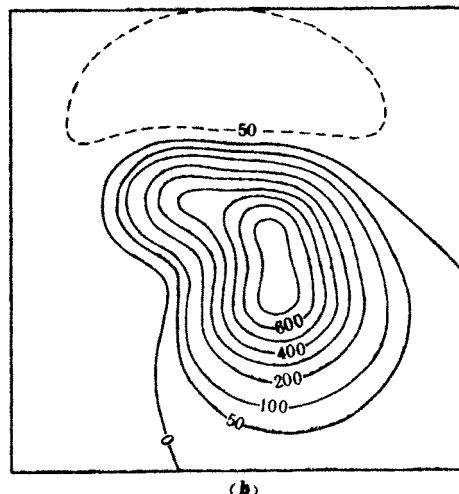


图2 模型的人工合成场



(a)



(b)

图3 -5.3单位的平面理论场(a)和延拓场(b)

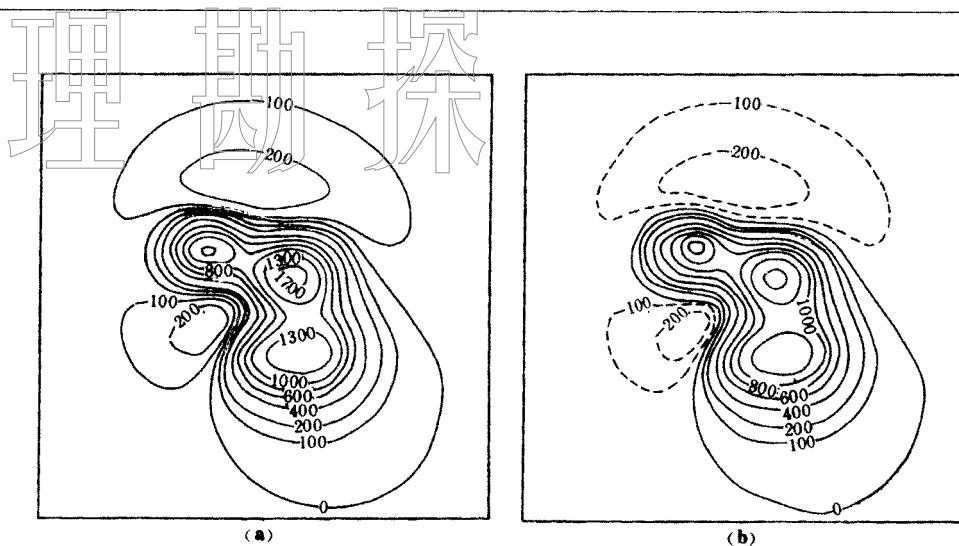


图4 -2.0单位的平面理论场(a)和延拓场(b)

采用本文提出的方法对模型数据作了不同高度的曲化平,结果如下:

-5.3单位平面,即最高测点平面。延拓场与理论场重合得非常好。理论场振幅为860nT,计算均方差为1.7nT(图3)

-2.0单位平面,大部分区域都是向下延拓。理论场与延拓场二者的一致性也很好,十分清晰地反映出地下3个源体的状况。该平面场振幅为2000nT,计算均方差为7nT(图4)。

下面是用本文提出的方法对某航磁观测数据进行曲面延拓的实例。

图5a是实际观测数据。测点高程为80m~450m,高差达370m,点距平均为40m,测线为不均匀分布的弯曲折线。这是一幅三维起伏地形上的不规则网数据。从图5a可见,等值线扭曲严重,伴有虚假异常现象。

为了消除观测曲面影响,将原曲面观测数据化到海拔400m和海平面两个平面上。这相当于曲面向上延拓和向下延拓,并同时实现网格化。

图5b是化到海拔400m,相当于化到最高测点平面。虽然图像清楚,但分辨力大大降低。因此用化到最高测点平面的办法作曲化平,尽管消除了观测面起伏的影响,但信息损失严重。

图5c是化到海平面的计算场,所有测点都作向下延拓。从此图可以看出,它既消除了等值线扭曲和虚假异常现象,又清楚地分辨出叠加异常。整个图像清晰、稳定。

结 论

本文根据矩量法原理推出了位场延拓的矩量公式。它是一个一般式,只要适当选取基函数和权函数就可以得到不同精度的计算结果。它既包含了前人的延拓方法,又提出了新的具有更高精度的算法。

本文使用等参元有限单元最小二乘矩量法,实现了高精度位场数据三维曲面延拓。它不需要对原始数据作任何预处理,既可作向上延拓又可作向下延拓。对模型和野外数据的

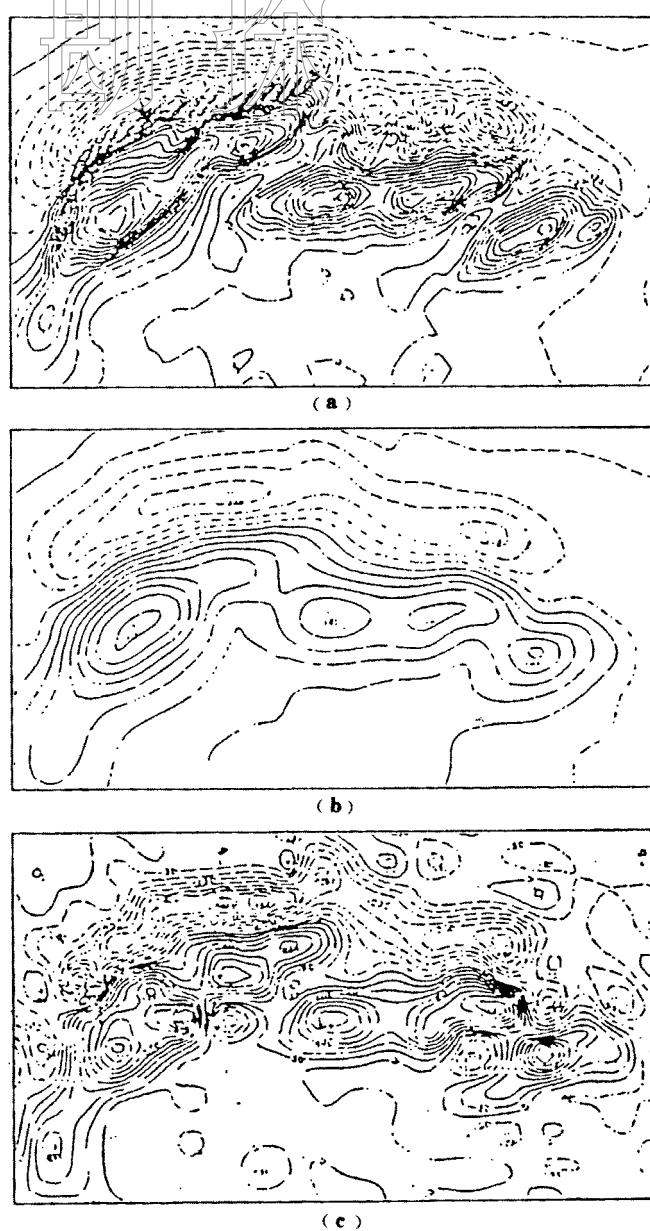


图5 起伏观测面上的实际观测数据(a)和化到海拔400m
平面上的图像(b)及化到海平面上的图像(c)

处理表明,这种算法精度高、使用方便,能适应各种复杂观测条件。

感谢刘维国、张敬华高级工程师对作者和本项研究的大力支持。

参 考 文 献

- 1 Strakhov V N, and Devitsyn V M. The reduction of observed values of a potential field to values at constant level. *Akad, Nauk USSR Izv, Fizika Zemli*, 1965, 256~261
- 2 Tsirulskiy A V. The reduction of observed potential fields to a single level. *Akad, Nauk USSR Izv,*

Fizika Zemli, 1965, 190~193

- 3 Damphey C N G. The equivalent source technique. *Geophysics*, 1969, 34(1): 39~53
- 4 Handerson R G, and Cordell L. Reduction of unevenly spaced potential field data to a horizontal plane by means of finite harmonic series. *Geophysics*, 1971, 36(5): 856~866
- 5 Parker R L, and Klitgord K D. Magnetic upward continuation from an uneven track. *Geophysics*, 1972, 37(4): 662~668
- 6 Syberg F J R. Potential continuation between general surfaces. *Geophysical Prospecting*, 1972, 20(2): 267~282
- 7 Emilia D A. Equivalent source used as an analytic base for proessing total magnetic field profiles. *Geophysics*, 1973, 38(2): 339~348
- 8 Parker R L. The rapid calculation of potential anomalies. *Geophys J Roy, Astr Soc*, 1973, 31: 447~455
- 9 Parker R L, and Huestis S P. The inversion of magnetic anomalies in the presence of topography. *J Geophy, Res*, 1974, 79, 1587~1593
- 10 Ducruix J, LeMouel J L, and Courtillot V. Continaation of three-dimensional potential field measured on an uneven surface. *Geophys J Roy, Astr Soc*. 1974, 38, 299~314
- 11 Bhattacharyya B K, and Chan K C. Reduction of magnetic and gravity data on arbitrary surfaces acquired in a region of high topographic relief. *Geophysics*, 1977, 42(7): 1477~1430
- 12 Nakatsuka T. Reduction of magnetic anomalies to and from an arbitrary surface. *Geophysical Exploration*, 1981, 34(1): 6~13
- 13 Hansen R O, and Miyazaki Y. Continuation of potential fields between arbitrary surfaces. *Geophysics*, 1984, 49(5): 787~795
- 14 Cordell L E, and Grauch V J S. Mapping basement magnetization zones from aeromagnetic data in the San Juan basin, New Mexico, in Hinze, W J Ed. The unility of regiona gravity and magnetic anomaly maps. *Soc Expl Geophys*, 1985, 181~197
- 15 Guspi F. Frequency-domain reduction of potential field measurements to a horizontal plane. *Geoexpl*, 1987, 24(1): 87~98
- 16 Pilkington M. Variable depth magnetization mapping:application to the Athabasca basin, northern Alberta and Saskatchewan, Canada. *Geophysics*, 1989, 54(8): 1164~1173
- 17 Pilkington M, and Urquhart W E S. Reduction of potential field data to a horizontal plane. *Geophysics*, 1990, 55(3): 549~555
- 18 Xia J, and Sprowl D R. Correction of topographic distortion in gravity data. *Geophysics*, 1991, 56(3): 537~541
- 19 周熙襄等. 用等效源法进行重磁异常换算的效果. 《物探化探计算技术》, 1979, (1): 15~26
- 20 王忠敏, 张喜丰. 在任意起伏地形曲面上观测的三维位场解析延拓. 《物化探研究报导》, 1980, (5)
- 21 程振炎. 重磁场的有限元曲化平. 《物探与化探》, 1981, 5(3): 153~158
- 22 王忠敏, 张培琴. 复杂磁异常若干处理方法. 《物化探研究报导》, 1981, (6)
- 23 陈钟琦. 等效偶层法位场曲面延拓的原理和计算方法, 《地球物理学报》, 1983, 26(1): 70~79
- 24 杜维本. 三维重磁场“曲化平”的一个方法. 《地球物理学报》, 1982, 25(1): 73~83
- 25 侯重初等. 从单层位出发建立曲面上的位场转换系统. 《物探化探计算技术》, 1985, 7(1,2): 1~2, 99~107
- 26 熊光楚. 利用观测面上等效源作磁场向上延拓的方法. 《地球物理学报》, 1985, 28(2): 334~335
- 27 侯重初等. 从偶层位出发建立曲面上的位场转换解释系统. 《地球物理学报》, 1985, 28(3): 410~418
- 28 何玉辉. 《空间域重磁资料处理解释系统》, 地质出版社, 1987
- 29 罗维俊, 王瑛. 航磁资料网格化几种方法的对比和探讨. 《物探化探计算技术》, 1983, 4(1): 17~22