

波动方程有限元—差分法数值解

孙彻 何柏荣 杨成新 刘企英

摘要

孙彻等：波动方程有限元—差分法数值解，《石油地球物理勘探》，21（3）
1986：259～267

有限元偏微分数值解是一种高精度求解波动方程的方法，但是，此法的运算量大，难以在地震资料偏移处理中广泛采用。若在 x 方向采用有限元剖分，在 y, t 方向采用差分算法，即首先把 y, t 看作参量， x 看作变量，在 x 方向作变分处理，则可得到精度高、速度快的偏移结果。在 x 方向把研究区间分为 $2N$ 等份，其偶数点对应剖分点，奇数点对应插值点。对于偶数行说来有 5 个非零元素，对于奇数行说来有 3 个非零元素，由此可求解 A 和 B 两个正定对称矩阵，从而完成 x 方向的有限元波动方程求解。在 (τ, t) 平面上进行差分处理，能得到一个五对角正定对称矩阵方程，通过 LR 矩阵分解法，可以求出未知的偏移波场。这种偏移方法有两个明显的优点：其一，采用了曲线插值，其精度要高于常用的线性插值；其二，采用了五对角对称矩阵，其舍入误差要小于常用的三对角对称矩阵。即便如此，此法的计算量较大，其运算时间约为 Claerbout 差分法的 1.6 倍。

ABSTRACT

Sun Che and others: Finite element-difference numerical solution of wave equation, 《OGP》, 21(3)1986: 259~267

Finite element partial differential numerical solution is a high accuracy method for solving wave equation; however, this method perhaps can not be widely used in seismic migration because of its too large quantity of operation. High accuracy migration result can be got fastly so long as finite elements are used in x direction and difference operations are made in y, t directions, that is to say, y, t are considered as parameters, and x the variable, variation operation being conducted in x direction. The research range in x direction is divided into

$2N$ equal intervals, the even number points being on partition marks, and odd number points on interpolating points. There are five nonzero elements in even columns and three nonzero elements in odd columns so that two positive definite symmetric matrixes A, B may be solved to accomplish the solution of finite element wave equation in x direction. Taking difference operation on (τ, t) plane can bring the equation of quidiagonal positive definite symmetric matrix. The unknown migration wave field can be deduced by conducting LR decomposition of the matrix. This migration method has two advantages: (1) the higher accuracy due to the use of curve interpolation; (2) the lower rounding error because of the use of quidiagonal symmetric matrix. Unfortunately, this method needs more operation, its computer time is 1.6 multiples of that taken by Claerbout's finite difference method.

有限元法在工程领域中有广泛的应用。近年来不少人已将有限元偏微分方程的数值解引用到地震资料偏移处理方面来。在应用有限元法求解偏微分方程数值解时，无论采用总刚度矩阵，还是分块矩阵，运算量都是很大的。例如，对1000道、5s长的地震记录，若采样间隔为4ms，单元以矩形元表示，则有 $1,000 \times 1,250$ 个节点，即总刚度矩阵为 $1,250,000$ 阶矩阵。目前我们拥有的计算机求解如此高阶矩阵方程，显然是很困难的。

为了利用有限元法运算精度高和差分法运算速度快的优点，我们在横向利用有限元法运算，在纵向利用差分法运算，从而提高了地震数据偏移的精度，所用时间也仅为Claerbout差分法所需时间的1.5~1.6倍。

原理

由二维波动方程 $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0$ 出发，经过坐标变换，即 $x' = x$, $\tau = 2z/c$, $t' = t + 2z/c$ ，并简化，得到下列 15° 波动方程

$$\begin{cases} P_{xx} + \frac{8}{c^2} P_{tt} = 0 \\ P|_{\tau=0} = \Psi(x, t) & \Psi(x, t) \text{ 为原始水平叠加记录} \\ P \equiv 0 & \text{当 } x > x_{\max}, x < x_{\min}, t > t_{\max} \text{ 时} \end{cases} \quad (1)$$

为节约工作量，我们在 x 方向用有限元， y 、 t 方向用差分，即首先把 y 、 t 看作参数， x 看作变量，在 x 方向作变分处理。

记 x 的区间 $I = [0, a]$ ，取 Sobolev 空间 $H'[I] = \{V: V, V' \in L_2(I)\}$ 作为试验函数空间。任取 $V \in H'[I]$ 与式(1)相乘，并且在 x 的区间 $[0, a]$ 内积分，得

$$\int_0^a \frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial t} V dx + \int_0^a \frac{c^2}{8} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} V dx = 0 \quad (2)$$

考虑到

$$\begin{aligned} \int_0^x -\frac{c^2}{8} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} V dx &= \frac{c^2}{8} \int_0^x V d\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) \\ &= \frac{c^2}{8} V \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_0^x - \frac{c^2}{8} \int_0^x \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial x} dx \\ &= -\frac{c^2}{8} \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

将式(3)代入式(2), 得

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \tau \partial t}, V \right) - \frac{c^2}{8} \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \quad (4)$$

以上通过变分处理产生的 Galerkin 型方程, 可在子空间 $S_h(I) = \text{Span}\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_m\} \in H'[I]$ 中求 $P_h(x, y, t)$, 使得每一个 $(y, t) \in [0, \infty) \times [0, T]$ 有 $P_h(x, y, t) \in S_h(I)$, 且

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2 P_h}{\partial \tau \partial t}, V \right) - \frac{c^2}{8} \left(\frac{\partial P_h}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0 \\ P_h|_{\tau=0} = \Psi_h(x, t) \\ P_h|_{t=T} \equiv 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\Psi_h(x, t) \in S_h(I)$ 是 $\Psi(x, t)$ 的插值函数, 如何具体确定将在后面给出。

令

$$P_h(x, y, t) = \sum_{j=0}^m a_j(\tau, t) \phi_j(x) \quad (6)$$

则有

$$\frac{\partial^2 P_h}{\partial \tau \partial t} = \sum_{j=0}^m \frac{\partial^2 a_j}{\partial \tau \partial t} \phi_j(x) \quad (7)$$

$$\frac{\partial P_h}{\partial x} = \sum_{j=0}^m a_j(\tau, t) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \quad (8)$$

将 V 换成基函数 $\phi_i(x)$, 并将式(7)、式(8)代入式(5), 得

$$\left(\sum_{j=0}^m \frac{\partial^2 a_j}{\partial \tau \partial t} \phi_j(x), \phi_i(x) \right) - \frac{c^2}{8} \left(\sum_{j=0}^m a_j(\tau, t) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) = 0$$

即

$$\sum_{j=0}^m (\phi_i(x), \phi_j(x)) \frac{\partial^2 a_j}{\partial \tau \partial t} - \frac{c^2}{8} \sum_{j=0}^m \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right) a_j(\tau, t) = 0 \quad (9)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

记

$$a_{ij} = (\phi_i, \phi_j) \quad \mathbf{A} = (a_{ij})_{m+1 \times m+1}$$

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) \quad \mathbf{B} = (b_{ij})_{m+1 \times m+1}$$

则式(9)可表示为

物理勘探

$$\mathbf{A} \frac{\partial^2 \vec{\alpha}}{\partial \tau \partial t} - \frac{c^2}{8} \mathbf{B} \vec{\alpha} = 0 \quad (10)$$

式中 $\vec{\alpha} = \{\alpha_0(\tau, t), \alpha_1(\tau, t), \dots, \alpha_m(\tau, t)\}$ 。

现在讨论式(10)的定解条件。因为 $\Psi_h(x, t) \in \mathbf{S}_h(I)$, 所以

令 $P_h|_{\tau=0} = \Psi_h(x, t) = \sum_{j=0}^m \alpha_j(0, t) \phi_j(x)$

设 $\{\phi_i(x)\}$ 满足 $\phi_i(x_i) = \delta_{ij}$, $x_i \in [0, a]$ 为剖分节点, 取 $\alpha_j(0, t) \equiv \Psi(x_i, t)$, 则有

$$\Psi_h(x, t) = \sum_{j=0}^m \Psi(x_i, t) \phi_j(x)$$

且

$$\Psi_h(x_s, t) = \sum_{j=0}^m \Psi(x_i, t) \phi_j(x_s) = \Psi(x_s, t) \quad s = 0, 1, 2, \dots, m$$

$\Psi(x_i, t)$ 为原始剖面数据, 或前次计算所得的数据, 因此 Ψ_h 为 Ψ 的一个插值函数。

令

$$\vec{\alpha}(0, t) = \vec{P}(t) \equiv \{\Psi(x_i, t)\}_{i=0}^m \quad (11)$$

则得定解问题

$$\begin{cases} \mathbf{A} \frac{\partial^2 \vec{\alpha}}{\partial \tau \partial t} - \frac{c^2}{8} \mathbf{B} \vec{\alpha} = 0 \\ \vec{\alpha}(0, t) = \vec{P}(t) \\ \vec{\alpha}(y, T) = 0 \end{cases} \quad T = t_{\max} \quad (12)$$

式中

$\mathbf{A} = [(\phi_i, \phi_j)]_{i,j=0}^m$ 为 $\{\phi_i\}$ 的 Gram 矩阵

$$\mathbf{B} = \left[\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right) \right]_{i=0}^m$$

\mathbf{A}, \mathbf{B} 均为正定矩阵。

二次元方法

将 x 方向区间 $[0, a]$ 均分为 $2N$ 等份, 即取 N 为总处理道数的一半, 如图 1 所示

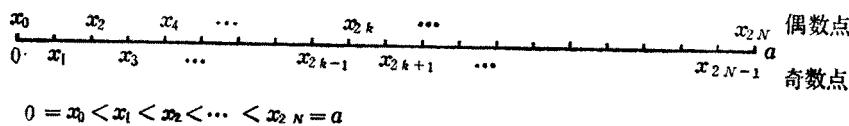


图 1 x 方向剖分形式

偶数点对应于剖分点, 即整分点; 奇数点对应于插值点, 即半整分点

记 $h = a/N$, $I_k = [x_{2(k-1)}, x_{2k}]$ 为第 k 单元。在 $I = [0, a]$ 上构造二次插值基函数。

设基函数为: $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, \dots , $\phi_{2(k-1)}(x)$, $\phi_{2k-1}(x)$, $\phi_{2k}(x)$, \dots , $\phi_{2N}(x)$ 。

它们对应的节点为 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2(k-1)}, x_{2k-1}, x_{2k}, \dots, x_{2N}$ 。已知在标准单元

$\hat{I}_k = [0, 1]$ 上, 二次元局部基为

$$\begin{cases} L_0(\xi) = (2\xi - 1)(\xi - 1) \\ L_{1/2}(\xi) = 4\xi(1 - \xi) \\ L_1(\xi) = (2\xi - 1)\xi \end{cases} \quad (13)$$

则有

$$\begin{cases} L_0(0) = 1 & \text{其它处为0} \\ L_{1/2}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 & \text{其它处为0} \\ L_1(1) = 1 & \text{其它处为0} \end{cases}$$

由此得到第 k 单元 I_k 上的局部基。

下面研究整体基。现作变换 $\xi = (x - x_{2(k-1)})/k$, 并注意 x_{2k} 为两单元公共点, 则整体基函数表示为

$$\phi_{2k}(x) = \begin{cases} L_1(\xi(x)) & x \in I_k, \xi = \frac{x - x_{2(k-1)}}{k} \\ L_0(\xi(x)) & x \in I_{k+1}, \xi = \frac{x - x_{2k}}{k} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (14)$$

式 (14) 可以图 2 说明。

对于本文所讨论的边界来说, 当 $k=0$ 时, $\phi_0(x)=0$, 当 $k=N$ 时, $\phi_{2N}(x)=0$ 。由于 x_{2k+1} 不是单元之间的公共点, 而仅是单元内部的插值点, 所以有

$$\phi_{2k+1}(x) = \begin{cases} L_{1/2}(\xi(x)) & x \in I_{k+1}, \xi = \frac{x - x_{2k}}{h} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (15)$$

其函数图形如图 3 所示。

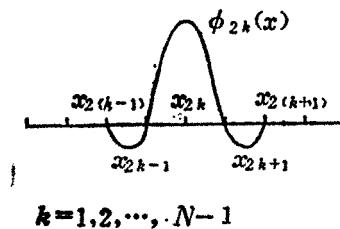


图 2 整体基函数

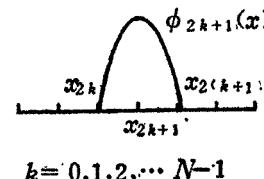


图 3 $\phi_{2k+1}(x)$ 函数图形

在整个区间 $I=[0, a]$ 上, $\phi_{2k+1}(x) \neq 0$ 的子区间只有一个, 即 I_{k+1} , 而 $\phi_{2k}(x) \neq 0$ 的子区间有两个, 即 I_k 和 I_{k+1} 。

现在研究矩阵 A 的计算。对于偶数行说来, 第 $2k$ 行的因子有 (ϕ_{2k}, ϕ_0) , (ϕ_{2k}, ϕ_1) , ..., $(\phi_{2k}, \phi_{2(k-1)})$, (ϕ_{2k}, ϕ_{2k-1}) , (ϕ_{2k}, ϕ_{2k}) , (ϕ_{2k}, ϕ_{2k+1}) , (ϕ_{2k}, ϕ_{2k+2}) , ..., (ϕ_{2k}, ϕ_{2N}) , 其中只在公共点两侧相邻四个因子 (含公共点有五个因子) (图 4) 中仅有五个元素不为零。由于 $\phi_0(x) = \phi_{2N}(x) = 0$, 所以第 0 行和第 $2N$ 行全部

元素为0。具体计算一个元素的方法如下：
例如

$$\begin{aligned}
 a_{2k, 2k-2} &= (\phi_{2k}, \phi_{2k-2}) = \int_0^a \phi_{2k} \phi_{2k-2} dx \\
 &= \int_0^1 L_1(\xi) L_0(\xi) \frac{dx}{d\xi} d\xi \quad \xi = \xi(x) = \frac{x - x_{2k}}{h} \\
 &= h \int_0^1 (2\xi - 1)\xi(2\xi - 1)(\xi - 1)d\xi \\
 &= -\frac{h}{30}
 \end{aligned}$$

其余四个元素可通过类似地计算得到。由此得到第 $2k$ 行的五个非零元素为

$$a_{2k, 2(k-1)}, a_{2k, 2k-1}, a_{2k, 2k}, a_{2k, 2k+1}, a_{2k, 2(k+1)}$$

对于奇数行 $2k+1$ 行来说，仅有3个非零元素的因子，即 $(\phi_{2k+1}, \phi_{2k}), (\phi_{2k+1}, \phi_{2k+1}), (\phi_{2k+1}, \phi_{2k+2})$ ，由此得到矩阵

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & & a_{2N-1, 2N-2} \quad a_{2N-1, 2N-1} \end{array} \right] \quad (16)$$

矩阵 \mathbf{A} 为正定对称矩阵。矩阵 \mathbf{B} 的结构与矩阵 \mathbf{A} 的结构一样，虽然同为 $2N-1$ 阶的正定对称矩阵，但在计算中需注意 $\phi'_i(x) = L'_i(\xi) \frac{d\xi}{dx}$ 。

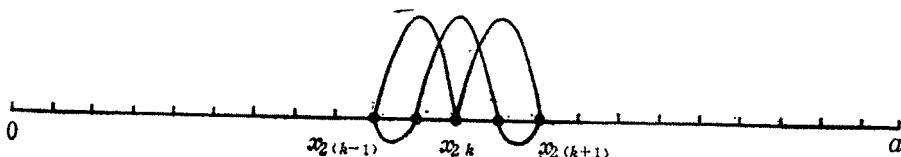


图 4 偶数行非零元素分布

通过以上计算，即完成在 x 方向的有限元计算。在所得的有限元方程式 (10) 中是把 τ, t 看成参量的，为了提高计算速度，我们在 (τ, t) 平面上进行差分离散。

记 $(j, n) = (j\Delta\tau, n\Delta t)$ ，其中 $\Delta\tau$ 为延拓间隔， Δt 为采样间隔。在 $(j + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ 处对上述有限元方程进行离散，略去余项，并记 $h = \Delta x = a/N$ ，经整理后得

$$\mathbf{E}_1 \{ \vec{\alpha}_{j+1}^n + \vec{\alpha}_{j+1}^{n+1} \} = \mathbf{E}_0 \{ \vec{\alpha}_j^n + \vec{\alpha}_{j+1}^{n+1} \} \quad (17)$$

式中： $\mathbf{E}_1 = \mathbf{A} + \eta\mathbf{B}$ ； $\mathbf{E}_0 = \mathbf{A} - \eta\mathbf{B}$ ，这里 $\eta = \frac{5}{16} \frac{c^2 \Delta\tau \Delta t}{\Delta x^2}$ 。

由式(17)可以看出，最后所得的方程实际上是五对角正定对称矩阵方程，其中 $\vec{\alpha}_j^n$ ，

$\alpha_{i+1}^{n+1}, \alpha_{i+1}^{n+1}$ 都为已知波场函数, 仅有 α_{i+1}^n 为未知波场函数。这种矩阵的解法很多, 我们采用 LR 分解法。

具体算法

式(17)可写成 $\mathbf{H}\mathbf{x} = \mathbf{f}$ 的形式, 其中 \mathbf{H} 为五对角正定对称矩阵, 应用 LR 分解法求解。

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} & a_{4,2} & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{4,3} & a_{5,3} & 0 \\ & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{5,4} & a_{6,4} \\ & & a_{i,i-2} & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i+1,i} & a_{i+2,i} \\ 0 & & & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} & a_{n+1,n} & a_{n+2,n} \end{pmatrix}$$

令 $\mathbf{H} = \mathbf{LR}$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & & & & & \\ l_{2,1} & l_{2,2} & & & & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} & & & 0 \\ l_{4,2} & l_{4,3} & l_{4,4} & & & \\ & l_{i,i-2} & l_{i,i-1} & l_{i,i} & & \\ 0 & & l_{n,n-2} & l_{n,n-1} & l_{n,n} & \end{pmatrix}$$

$$l_{i,j} = \begin{cases} 0 & j > i \\ 0 & i - j > 2 \\ \neq 0 & \text{其它} \end{cases}$$

式中: $l_{1,1} = a_{1,1}$, $l_{2,1} = a_{2,1}$, $l_{2,2} = a_{2,2} - a_{2,1}^2/a_{1,1}$, ..., $l_{i,i-2} = a_{i,i-2}$,
 $l_{i,i-1} = a_{i,i-1} - l_{i,i-2} \cdot l_{i-1,i-2}/l_{i-2,i-2}$,
 $l_{i,i} = a_{i,i} - l_{i,i-2}^2/l_{i-2,i-2} - l_{i,i-1}^2/l_{i-1,i-1}$, ..., 其中 $i = 3, 4, \dots, n$ 。

R 矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & l_{2,1}/l_{1,1} & l_{3,1}/l_{1,1} & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & l_{3,2}/l_{2,2} & l_{4,2}/l_{2,2} & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & l_{i+1,i}/l_{i,i} & l_{i+2,i}/l_{i,i} \\ 0 & & & & 1 & \\ & & & & & \end{pmatrix}_{n \times n}$$

其中

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1 & j=i \\ l_{j,i}/l_{i,i} & j \neq i \end{cases}$$

可见, \mathbf{R} 为 \mathbf{L} 的转置矩阵, 并在各行乘以 $1/l_{i,i}$ 。

关于 $\vec{\mathbf{H}}\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{f}}$ 矩阵方程的具体解法如下: 考虑到 $\vec{\mathbf{H}} = \mathbf{LR}$, 令 $\vec{\mathbf{R}}\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{Y}}$, 则 $\vec{\mathbf{H}}\vec{\mathbf{X}} = \vec{\mathbf{f}}$ 变为 $\vec{\mathbf{LY}} = \vec{\mathbf{f}}$, 解此下三角矩阵方程, 有 $y_1 = f_1/l_{1,1}$, $y_2 = (f_2 - l_{2,1} \cdot y_1)/l_{2,2}$, ..., $y_i = (f_i - l_{i,i-2} \cdot y_{i-2} - l_{i,i-1} \cdot y_{i-1})/l_{i,i}$, ..., 这里 $i = 3, 4, \dots, n$ 。求出 $\vec{\mathbf{Y}}$ 以后, 再解上三角矩阵方程 $\vec{\mathbf{RX}} = \vec{\mathbf{Y}}$, 得到 $x_n = y_n$, $x_{n-1} = y_{n-1} - l_{n,n-1} \cdot y_n$, ..., $x_i = y_i - l_{i+1,i} \cdot x_{i+1} - l_{i+2,i} \cdot x_{i+2}$, ..., 这里 $i = n-2, n-3, \dots, 2, 1$ 。

由以上过程解出 $\vec{\mathbf{X}}$, 再减去 α_{i+1}^n , 即可求出所要延拓的波场函数 α_{i+1}^n 值。依此类推, 其运算方式类似于 Claerbout 的方法, 最后求得偏移波场的函数值。

分别应用 15° 波动方程差分法和 15° 波动方程有限元一差分法对理论剖面和实际资料进行了偏移试算, 得到了较好的结果(图 5—图 8)。

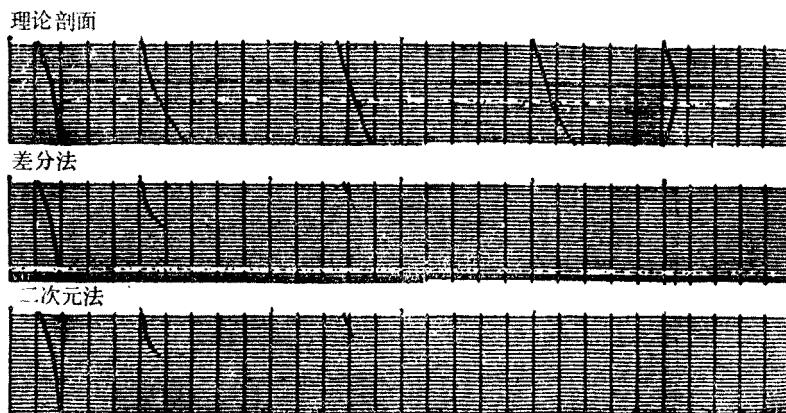


图 5 有限元一差分法及其它方法对理论剖面的偏移效果

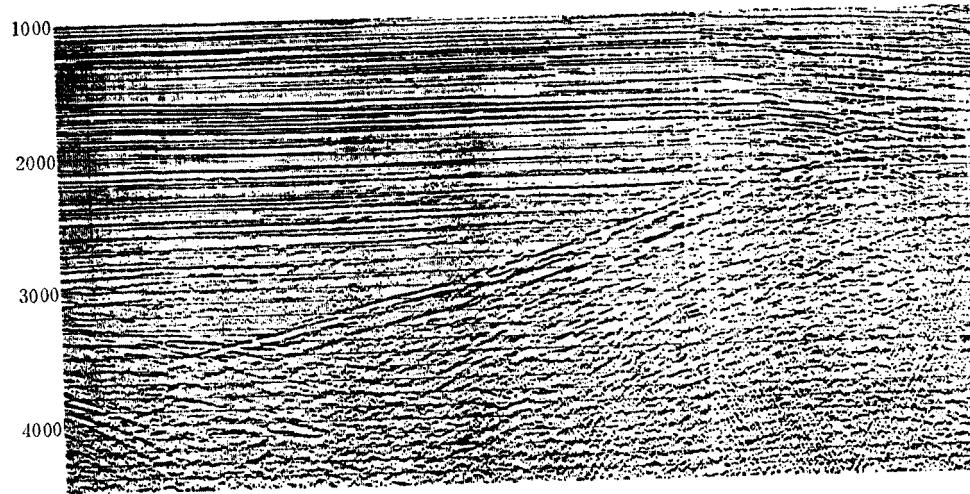


图 6 FD 测线水平叠加剖面

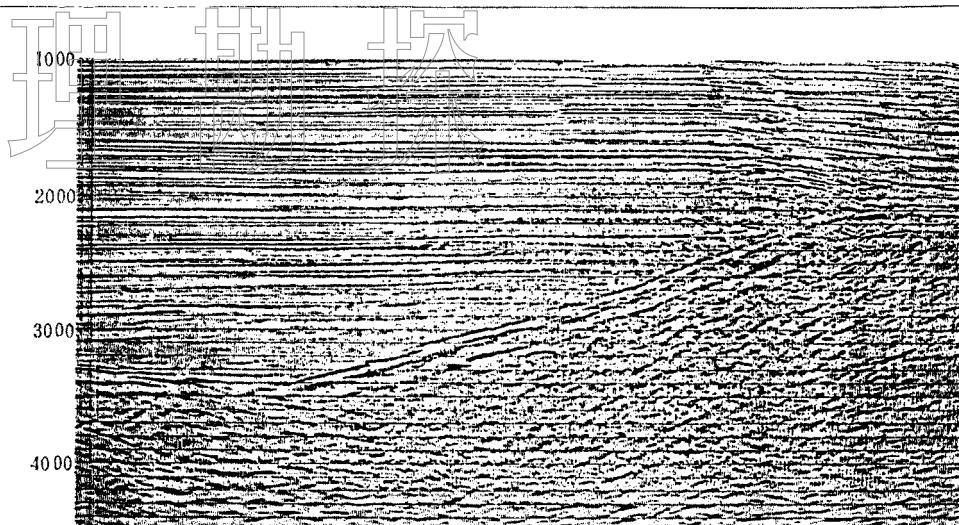


图 7 FD 测线用有限差分法处理的偏移剖面

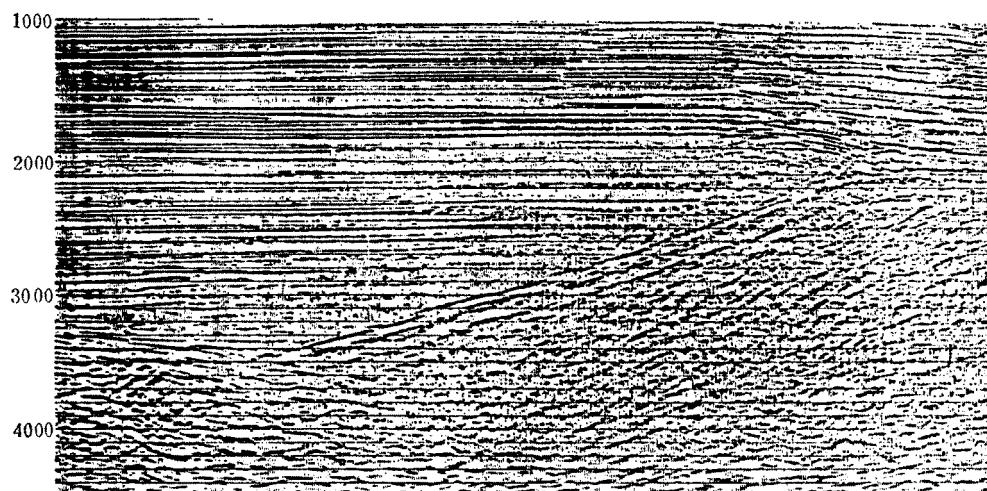


图 8 FD 测线用二次元一差分法处理的偏移剖面

造成有限元一差分法偏移效果较好的原因有两个方面: 其一在于采用曲线插值的精度要高于线性插值精度; 其二, 采用五对角矩阵方程的舍入误差要比三对角矩阵方程的舍入误差小。但是, 采用这种方法的计算工作量增加了, 约为 Claerbout 差分算法的 1.6 倍左右。

参 考 文 献

- [1] Strang, G., Fix, G. J.: «An analysis of the finite element method», Prentice-Hall, 1973
- [2] 邹焕新等译: 《有限单元法的综合理论》, 人民教育出版社, 1982