DOI:10.13810/j.cnki.issn.1000-7210.1980.04.009

快速哈达马德变换

张崇高

摘　　要

本文讨论一种基于二进制运算的快速哈达马德变换（FHT）。文中从哈达马德矩阵的定义出发，并根据此种矩阵的性质，着重进行了快速哈达马德变换的理论推导。最后，给出了便于应用的一般计算公式。

哈达马德变换在地震勘探数字滤波技术中可以得到广泛应用，本文将对哈达马德变换进行必要的讨论。

哈达马德矩阵

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为一 n 阶方阵，若矩阵的每一个元素 a_{ij} 只取值 1 或 -1，并且任意两行互为正交，即满足条件

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ a_{jk}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ n & i=j\end{cases} \tag{1}$$

或者写成 $AA^T=nE_n$（其中 A^T 是 A 的转置矩阵），则称 A 为 n 阶哈达马德矩阵。

我们把二阶哈达马德矩阵称为一级哈达马德矩阵，记为

$$H_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \tag{2}$$

在实际中用得最广的是 2^m 阶哈达马德矩阵，这种矩阵可以用不同的方法构造出来。下面我们采用直接乘积的方式来定义 2^m 阶的哈达马德矩阵，为此，首先给出下面引理：

若 A 与 B 分别是 n 阶与 m 阶的哈达马德矩阵，则 $C=A\times B$ 为 mn 阶的哈达马德矩阵。

依此定义矩阵

$$H_m=\overbrace{H_1\times H_1\times\cdots\times H_1}^{m} \tag{3}$$

为 m 级的哈达马德矩阵，也就是 2^m 阶哈达马德矩阵。

哈达马德矩阵的性质

哈达马德矩阵具有下列性质：

1．若 H_m 为 m 级哈达马德矩阵，则有

$$H_m H_m = 2^m E_{2^m} \tag{4}$$

2．H_m 的逆矩阵存在，且

$$H_m^{-1} = \frac{1}{2^m} H_m \tag{5}$$

3．对于任何 m，H_m 是非奇异的，即

$$|H_m| \neq 0 \tag{6}$$

4．若 H_m^T 是 H_m 的转置矩阵，则

$$H_m = H_m^T \tag{7}$$

即 H_m 是对称矩阵。

哈达马德变换

设 x_1，x_2，…，x_{2^m} 为一时间序列，其列矩阵形式为

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{2^m} \end{pmatrix}$$

H_m 为 2^m 阶方阵，定义 2^m 维空间的线性变换

$$Y = \frac{1}{N} H_m X \qquad (N = 2^m) \tag{8}$$

为 X 的哈达马德变换，并记为 $Y = H[X]$。

显然，由 X 求 Y 需要做 $2^m(2^m-1)$ 次加（或减）法、2^m 次乘法计算。

因为 H_m 是非奇异的，所以哈达马德变换的逆变换是唯一存在的。其逆变换公式为：

$$X = H^{-1}[Y] = H_m Y \tag{9}$$

把上式写为数量形式可知，由 Y 求 Z 不需要乘法，只需要 $2^m(2^m-1)$ 次加（或减）法。

快速哈达马德变换（FHT）

我们要讨论的 FHT 算法基于下面的定理：

令 $i = \sum_{r=0}^{m-1} i_r 2^r$，$j = \sum_{r=0}^{m-1} j_r 2^r$，并设 H_m 的第 i 行第 j 列的元素为 $\mathrm{Had}_{i,j}^{(m)}$，则

$$\mathrm{Had}_{i,j}^{(m)} = (-1)^{\sum_{r=0}^{m-1} i_r j_r} \tag{10}$$

由于哈达马德变换的正变换与逆变换只相差一个常数，因此，哈达马德变换的计算归结为下列变换

$$\eta = H_m \xi \tag{14}$$

的计算。

令

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi(0) \\ \xi(1) \\ \vdots \\ \xi(2^m-1) \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \eta(1) \\ \vdots \\ \eta(2^m-1) \end{pmatrix}$$

则（14）式可以改写为数量形式

$$\eta(i) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi(j)\mathrm{Had}_{i,j}^{(m)} \qquad (i = 0, 1, \cdots, N-1) \tag{15}$$

从（15）式出发，便可导出快速哈达马德变换的计算公式。

1．以 $N = 2^3$ 为例来说明快速哈达马德变换是怎样进行的。

当 $N = 2^3$ 时，（15）式变为

$$\eta(i) = \sum_{j=0}^{7} \xi(j)\mathrm{Had}_{i,j}^{(3)} \qquad (i = 0, 1, \cdots, 7) \tag{16}$$

令

$$i = \sum_{r=0}^{2} i_r 2^r = (i_2, i_1, i_0); \quad j = \sum_{r=0}^{2} j_r 2^r = (j_2, j_1, j_0)$$

则（16）式可以改写为

$$\eta(i_2, i_1, i_0) = \sum_{j_2=0}^{1} \sum_{j_1=0}^{1} \sum_{j_0=0}^{1} (-1)^{\sum_{r=0}^{2} i_r j_r} \xi(j_2, j_1, j_0)$$

$$= \sum_{j_0=0}^{1} (-1)^{i_0 j_0} \sum_{j_1=0}^{1} (-1)^{i_1 j_1} \sum_{j_2=0}^{1} (-1)^{i_2 j_2} \xi(j_2, j_1, j_0) \tag{17}$$

令

$$\begin{cases} A_0(j_2, j_1, j_0) = \xi(j_2, j_1, j_0) \\ A_1(i_2, j_1, j_0) = \sum_{j_2=0}^{1} (-1)^{i_2 j_2} A_0(j_2, j_1, j_0) \\ A_2(i_2, i_1, j_0) \quad \sum_{j_1=0}^{1} (-1)^{i_1 j_1} A_1(i_2, j_1, j_0) \\ A_3(i_2, i_1, i_0) = \sum_{j_0=0}^{1} (-1)^{i_0 j_0} A_2(i_2, i_1, j_0) \end{cases}$$

则　　$\eta(i_2,i_1,i_0)=A_3(i_2,i_1,i_0)$

通过以上讨论得到FHT算法：对于给定数据

$$\xi(j)=A_0(j)\qquad(j=0,1,\cdots,7)$$

由公式（16）所规定的八个实数

$$\eta(i)=A_3(i)\qquad(i=0,1,\cdots,7)$$

可由下列公式算出

$$\begin{cases}A_1(i_2,i_1,j_0)=\sum\limits_{j_2=0}^{1}(-1)^{i_2j_2}A_0(j_2,i_1,j_0)\\ A_2(i_2,i_1,j_0)=\sum\limits_{j_1=0}^{1}(-1)^{i_1j_1}(A_1(i_2,j_1,j_0)\\ A_3(i_2,i_1,i_0)=\sum\limits_{j_0=0}^{1}(-1)^{i_0j_0}A_2(i_2,i_1,j_0)\end{cases}\tag{18}$$

由（18）的第一式知

$$\begin{aligned}A_1(i_2,j_1,j_0)&=\sum_{j_2=0}^{1}(-1)^{i_2j_2}A_0(j_2,j_1,j_0)\\&=A_0(0,j_1,j_0)+(-1)^{i_2}A_0(1,j_1,j_0)\end{aligned}\tag{19}$$

在（19）式中，令$i_2,j_1,j_0=0,1$

则有

$$\begin{aligned}A_1(0,0,0)&=A_0(0,0,0)+A_0(1,0,0)\\A_1(0,0,1)&=A_0(0,0,1)+A_0(1,0,1)\\A_1(0,1,0)&=A_0(0,1,0)+A_0(1,1,0)\\A_1(0,1,1)&=A_0(0,1,1)+A_0(1,1,1)\\A_1(1,0,0)&=A_0(0,0,0)-A_0(1,0,0)\\A_1(1,0,1)&=A_0(0,0,1)-A_0(1,0,1)\\A_1(1,1,0)&=A_0(0,1,0)-A_0(1,1,0)\\A_1(1,1,1)&=A_0(0,1,1)-A_0(1,1,1)\end{aligned}\tag{20}$$

由（18）的第二式知

$$\begin{aligned}A_2(i_2,i_1,j_0)&=\sum_{i_1=0}^{1}(-1)^{i_1j_1}A_1(i_2,j_1,j_0)\\&=A_1(i_2,0,j_0)+(-1)^{i_1}A_1(i_2,1,j_0)\end{aligned}\tag{21}$$

在（21）式中令$i_2,i_1,j_0=0,1$

则有

$$\begin{cases}A_2(0,0,0)=A_1(0,0,0)+A_1(0,1,0)\\A_2(0,0,1)=A_1(0,0,1)+A_1(0,1,1)\\A_2(0,1,0)=A_1(0,0,0)-A_1(0,1,0)\\A_2(0,1,1)=A_1(0,0,1)-A_1(0,1,1)\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
A_2(1,0,0) &= A_1(1,0,0) + A_1(1,1,0) \\
A_2(1,0,1) &= A_1(1,0,1) + A_1(1,1,1) \\
A_2(1,1,0) &= A_1(1,0,0) - A_1(1,1,0) \\
A_2(1,1,1) &= A_1(1,0,1) - A_1(1,1,1)
\end{aligned} \tag{22}
$$

由（18）的第三式知

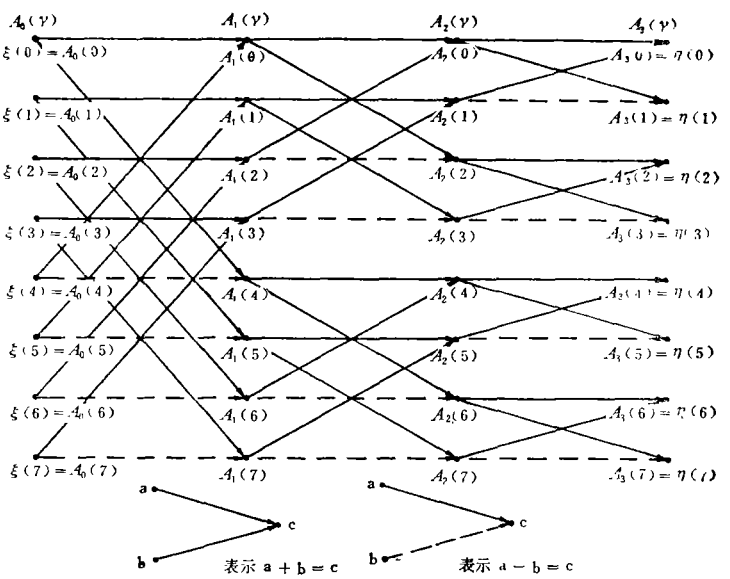
$$
\begin{aligned}
A_3(i_2,i_1,i_0) &= \sum_{j_0=0}^{1} (-1)^{i_0 j_0} A_2(i_2,i_1,j_0) \\
&= A_2(i_2,i_1,0) + (-1)^{i_0} A_2(i_2,i_1,1)
\end{aligned} \tag{23}
$$

在（23）式中，令 $i_2,i_1,i_0 = 0,1$

则有

$$
\begin{aligned}
A_3(0,0,0) &= A_2(0,0,0) + A_2(0,0,1) \\
A_3(0,0,1) &= A_2(0,0,0) - A_2(0,0,1) \\
A_3(0,1,0) &= A_2(0,1,0) + A_2(0,1,1) \\
A_3(0,1,1) &= A_2(0,1,0) - A_2(0,1,1) \\
A_3(1,0,0) &= A_2(1,0,0) + A_2(1,0,1) \\
A_3(1,0,1) &= A_2(1,0,0) - A_2(1,0,1) \\
A_3(1,1,0) &= A_2(1,1,0) + A_2(1,1,1) \\
A_3(1,1,1) &= A_2(1,1,0) - A_2(1,1,1)
\end{aligned} \tag{24}
$$

并由式子（20）、（22）、（24）与 $A_0(j) = \xi(j), A_3(i) = \eta(i)$ 可画出FHT算法的流程图。



FHT 算法流程图

2．快速哈达马德变换的一般计算公式

当 $N=2^m$ 时，变换公式为

$$\eta(i)=\sum_{j=0}^{N-1}\xi(j)\mathrm{Had}_{i,j}^{(m)} \qquad (i=0,1\cdots,N-1)$$

令

$$i=\sum_{r=0}^{m-1}i_r\,2^r, \qquad j=\sum_{r=0}^{m-1}j_r\,2^r$$

则有

$$\eta(i_{m-1},\cdots,i_0)=\sum_{j_{m-1}=0}^{1}\cdots\sum_{j_1=0}^{1}\cdots\sum_{j_0=0}^{1}(-1)^{\sum_{r=0}^{m-1}i_rj_r}\xi(j_{m-1},\cdots,j_0)$$

$$=\sum_{j_0=0}^{1}(-1)^{i_0j_0}\cdots\sum_{j_{m-r}=0}^{1}(-1)^{i_{m-r}j_{m-r}}\cdots\sum_{j_{m-1}=0}^{1}(-1)^{i_{m-1}j_{m-1}}\xi(j_{m-1},\cdots,j_0) \tag{25}$$

令

$$A_0(j_{m-1},\cdots,j_0)=\xi(j_{m-1},\cdots,j_0)$$

$$A_1(i_{m-1},j_{m-2},\cdots,j_0)=\sum_{j_{m-1}=0}^{1}(-1)^{i_{m-1}j_{m-1}}A_0(j_{m-1},j_{m-2},\cdots,j_0)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A_r(i_{m-1},\cdots,i_{m-(r-1)},i_{m-r},j_{m-(r+1)},\cdots,j_0)$$

$$=\sum_{j_{m-r}=0}^{1}(-1)^{i_{m-r}j_{m-r}}A_{r-1}(i_{m-1},\cdots,i_{m-(r-1)},j_{m-r},j_{m-(r+1)},\cdots,j_0)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A_m(i_{m-1},\cdots i_0)=\sum_{j_0=0}^{1}(-1)^{i_0j_0}A_{m-1}(i_{m-1},\cdots,i_1,j_0)$$

则

$$\eta(i_{m-1},\cdots,i_0)=A_m(i_{m-1},\cdots,i_0)$$

通过以上的讨论得到具有普遍意义的 FHT 算法如下：对于给定数据

$$\xi(j)=A_0(j) \qquad (j=0,1,\cdots,N-1)$$

由公式

$$\eta(i)=\sum_{j=0}^{N-1}\xi(j)\mathrm{Had}_{i,j}^{(m)} \qquad (i=0,1,\cdots,N-1)$$

所规定的 N 个实数

$$\eta(i)=A_m(i) \qquad (i=0,1,\cdots,N-1)$$

可由下列公式算出

$$A_r(i_{m-1},\cdots,i_{m-(r-1)},i_{m-r},j_{m-(r+1)},\cdots j_0)$$

$$=\sum_{j_{m-r}=0}^{1}(-1)^{i_{m-r}j_{m-r}}A_{r-1}(i_{m-1},\cdots,i_{m-(r-1)},j_{m-r},j_{m-(r+1)},\cdots,j_0) \tag{26}$$

$$(r=1,2,\cdots,m)$$

（下转 61 页）

值。然后根据地面垂直磁异常平面图，用（14）式向下延拓到 $z=h$ 的面上，再用图4量板在延拓值图上读取不同半径 $r=0$，1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{8.5}$，$\sqrt{17}$ 圆上的磁场平均值 H_n。最后分别乘以表2的相应系数，代入公式(16)即可算得 Δh。其它测点重复上述步骤。

所需条件和二维问题类似：a)平均基底深度 h 远远大于相对深度 Δh；b)磁化方向为垂直磁化，如磁化方向倾斜，上述系数应作修正。

以上我们介绍了磁法资料的直接解释法，目的是想对盆地深部基底研究有所帮助，是否合适，以供讨论。

参 考 文 献

〔1〕 Peters, L. J. ,The direct approch to magnetic interpretation and its practical apptication, 《Geophysics》,1949, No.3,P.290—320

〔2〕 Grant, F. S., West, G. F.,Interpretation theory in applied geophysics,1965, P. 250—316

〔3〕 重磁资料数字处理问题，地质出版社，1977年

（上接76页）

显然，由（26）所表示的FHT算法的工作量为 $N\ln_2 N$ 次加（或减）法，也就是说利用HFT算法可以把哈达马德变换的工作量由 $N(N-1)$ 次加（或减）法降至 $N\ln_2 N$ 次加（或减）法，从而提高了运算速度。

参 考 文 献

〔1〕 Henning F.Harmuth, Transmission of informations by orthogonal functions.

〔2〕 Theory and Applications of Walth Functions and other non-sinusoidal functions a colloquium, June 28th and 29th 1973.