石油地球物理勘探

对波动方程偏移的补充讨论

陈 俊 生

摘要 本文是对以往发表的波动方程偏移的补充讨论，旨在着重说明波动方程偏移处理的特点，并且从弦振动的概念出发，导出了一、二、三维波动方程式。这恰好可以弥补以往诸家文章中只侧重谈偏移而未涉及波动方程本身之由来的不足。文章最后对波动方程的全面应用作了估计。

波动方程偏移的特点

几何地震学引起的陡倾反射段的空间产状的错位现象是人所共知的。如何才能使其偏移（归位）到原始的空间位置上去呢？解决这一问题的方法一直在发展着。一般来说，偏移（归位）有两种途径。一种叫射线偏移，象目前资料处理中常用的迭加偏移或偏移迭加均属此类。另一种是波动偏移，这是以波的传播方程为基础进行偏移的。比较这两种方法，到底那种方法好呢？从理论上说，把地震波的传播简化为射线形式只是一种近似的方法。但是这样做比较直观，也便于运算。波动方程，显然是对波的传播机制的更为精确的描述，可是它的求解相对比较复杂。对于应用地球物理工作者来说，往往对基础理论中的假设条件不感兴趣，只要当这种假设所提供的应用效果能满足实际精度的要求就可以了。如果仅仅从偏移着眼，似乎二者差别不大。可能正是由于这个缘故，在目前的日常资料处理中，国内外的地球物理学界对于波动方程偏移技术的试验和使用并没有很高的热情。

现在的问题是，波动方程偏移与射线偏移相比，到底有那些突出的优点呢？其实二者的差异远不仅仅局限于偏移方面。自从美国斯坦福大学教授J·F·CLAERBOUT提出波动方程偏移方法以来，不少地区通过实际资料的反复验证，承认波动方程偏移有着独特的优越性，其主要优点是：1、波动方程偏移，增加了利用精确模型的可能性；2、在经过波动方程处理过的时间剖面上，保留了地震波的振幅信息及其他动力学特征。换言之，伴随着振幅信息的保留，频率也会完整无损地保留下来。由于保留了地震波的动力学特征，这就使得用偏移了的真振幅剖面做模型成为可能。这两个优点，一方面可以提高勘探复杂地质构造（断层，古潜山，陡构造，…）的能力；另外，它正好投合了当前用地震方法直接找油找气的需要。因此，对波动方程偏移技术越来越比较重视了。一个明显的设想已经基本成形，那就是想把波动方程处理用于未经迭加的地震数据中。这样，除了可以改进偏移剖面之外，还可以进行更精确的速度分析。我们可以预计，而且

事实也部分的证明，要想从野外采集的原始数据中最大限度地提取有用的信息，最终还要依靠波动方程。这就是说，波动方程法在未来的地震资料处 理中 将会占 据显要 的位置。现在，我们面临的任务是，如何针对波动方程提出一种适宜的新的处理程序。

波动方程的建立

《石油地球物理勘探》自去年以来，连续发表了儿篇介绍波动方程偏移的文章，但是由于作者旨在着重讨论波动方程的偏移，而对波动方程的由来缺乏详尽的叙述。这对一些初次接触波动方程的人来说，往往造成理解上的间断。在这一段，试图从简单的弦振动出发，逐步推导出一维、二维、三维情况下的波动方程式来，其目的是想对以往诸家的文章作一简单的补充。

事实上，地震波在地层中的传播可以用弦的振动来比拟。图1是一段有限长的弦在张力T作用下振动的情形。设u（x,t）表示弦在任一点x及任一时刻t的偏转，让我们来确定在不同初始条件下弦的运动方程。

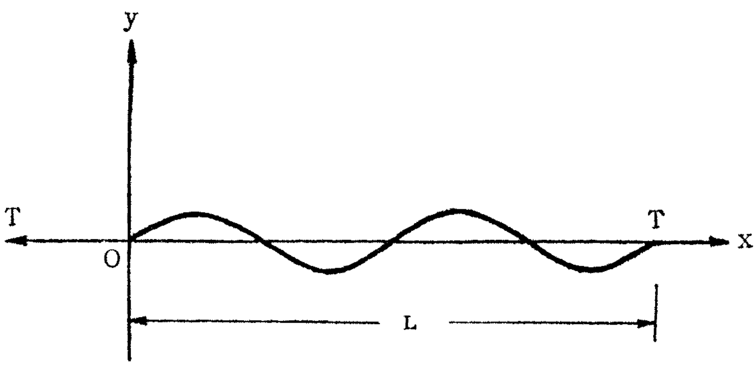

图　1　　两端固决的弦的振动的情形

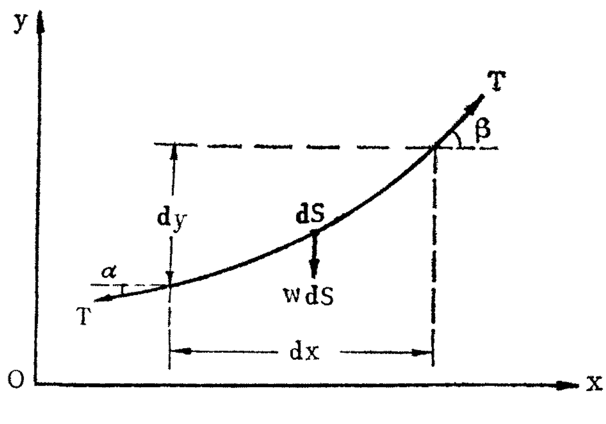

图　2　　振动弦的一个局部

为了直观起见，我们只取一段弦长来研究，如图 2。在图 2 上，弦的微分段 ds 由下式确定

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{1}$$

设 w 为弦的每单位长度的重量。显然，在 y 方向弦上任一点受力的总和应为

$$\Sigma F_y = -T\sin\alpha + T\sin\beta - w\,ds \tag{2}$$

实际上，偏移量是很小的。因此，（2）式中的 $\sin\alpha, \sin\beta$ 可以用 $tg\alpha, tg\beta$ 代替。同时，偏转之后弦在任一点上的斜率远比 1 小。也就是说，$dy \ll dx$。所以，作为公式（1）的一级近似将有

$$ds \doteq dx \tag{3}$$

于是公式（2）变成

$$\Sigma F_y = -T\,tg\alpha + T\,tg\beta - w\,dx \tag{4}$$

偏转了的弦在任一点 x 上的斜率，从微积分学公式可知

$$tg\alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{5}$$

同样，在一级近似中，

$$tg\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx \tag{6}$$

因而

$$\Sigma F_y = -T\frac{\partial u}{\partial x} + T\frac{\partial u}{\partial x} + T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - w\,dx$$

$$= T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx - Wdx \tag{7}$$

牛顿力学告诉我们，在 y 方向力的总和应等于质量 m 和 y 方向的加速度 a_y 的乘积，也就是 $\Sigma F = ma$。y 方向的加速度 a_y 是位移对时间的二阶导数，即

$$a_y = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

所以

$$ma_y = \frac{w}{g}\ dx\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{8}$$

其中 g 为引力常数。整理上述结果，我们可以得到

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx - w\,dx = \frac{w}{g}dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

两端消去 dx，并乘以 g/w，则有

$$\frac{gT}{w}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - g = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{9}$$

式中 gt/w 为具有速度平方因次的常数，通常可写作

$$\frac{gT}{w} = v^2$$

其中v为地震波的传播速度。事实上，g与$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$相比较，可以忽略不计，因而方程式(9)可写成如下的标准形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{10}$$

这就是弦振动的垂直运动u（x,t）所满足的一维波动方程式。

为了导出二维波动方程，让我们来分析薄膜振动的情形。假设在xy平面内有一薄膜，下面我们来建立薄膜偏转u（x,y,t）所满足的方程。取薄膜的微分面积元为dxdy，如果在任一时刻t，一个平行于xz平面的平面将面积元dxdy截成图3的形状；同样，另一平行于yz平面的平面将dxdy截成了图4。设w为膜每单位面积的重量，s为每单位长度的法线方向的作用力，此为常数。于是，在z方向内力的总和（ΣF_z）为

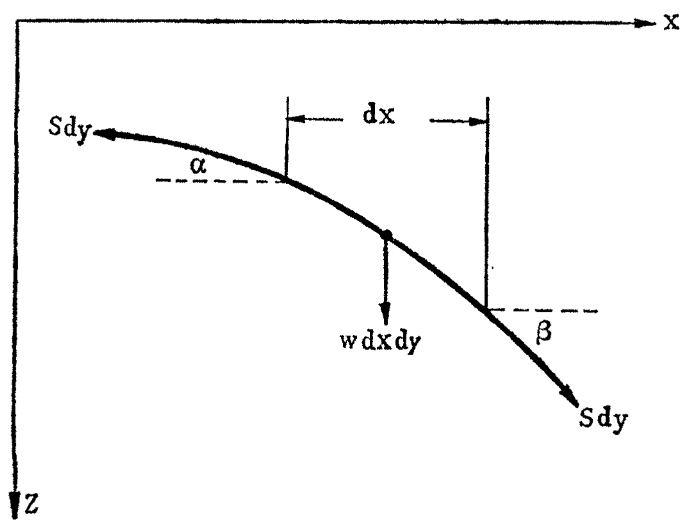

图 3　薄膜振动的一个截面

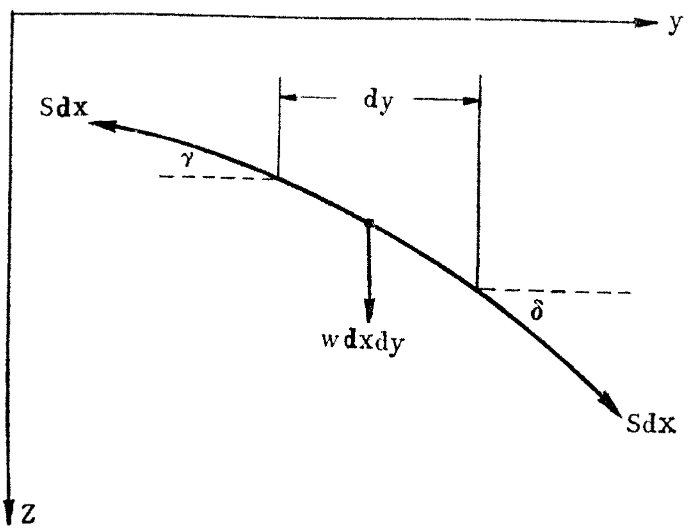

图 4　薄膜振动的另一个截面

$$\Sigma F_z = -s\,dy\sin\alpha + s\,dy\sin\beta - s\,dx\sin\gamma + s\,dx\sin\delta + w\,dx\,dy \tag{11}$$

由于薄膜在任一点上的斜率≪1，显而易见，如下的近似关系是成立的：

$$\sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \approx tg\,\alpha \text{ ，当 } tg\,\alpha \text{很小时}$$

$$\sin\beta = \frac{tg\,\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}} \approx tg\,\beta \text{ ，}$$

………

将上面的近似关系代入（11）式，则

$$\Sigma F_z = -s\,dy\,tg\,\alpha + s\,dy\,tg\,\beta - s\,dx\,tg\,\gamma + s\,dx\,tg\,\delta + w\,dx\,dy \tag{12}$$

我们从微积分学知道

$$tg\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$tg\,\gamma = \frac{\partial u}{\partial y}$$

另外

$$tg\,\beta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx$$

$$tg\,\delta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy$$

把上述结果代入方程式（12），有

$$\Sigma F_z = -s\,dy\frac{\partial u}{\partial x} + s\,dy\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right)$$

$$-s\,dx\frac{\partial u}{\partial y} + s\,dx\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right) + w\,dx\,dy$$

因为在膜的边界上的总力比膜的重量大得 很多，所以 $w\,dx\,dy$ 可以略去。将上式简化，得到

$$\Sigma F_z = s\,dx\,dy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{13}$$

这里 ΣF_z 同样遵从力学定律 $\Sigma F_z = ma_z$，a_z 为 z 方向的加速度。面积元 $dx\,dy$ 的质量为

$$m = \frac{w}{g}dx\,dy$$

而其加速度

$$a_z = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

故

$$s\,dx\,dy\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{w}{g}dx\,dy\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

方程两边同时除以 dxdy，并乘以 g/w，则有

$$\frac{gs}{w}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和弦振动的情形一样，gs/w 具有速度平方的因次，亦即 $gs/w=v^2$，于是薄膜振动的方程式如下：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{14}$$

这就是标准的二维波动方程。

假如把上面的结果推广到三维弹性体振动的情形中去，我们便可得到如下形式的方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{15}$$

方程（15）是三维波动方程的标准形式。

通常，用有限差分法对波动方程求解，以达到实现偏移的目的。有关这方面的讨论已经很多了，这里不再赘述。

从石油物探技术的发展想到的几点结论

美国最近对公元二〇〇〇年石油地球物理勘探技术发展的动向作了预测。他们声称，今后的石油地球物理勘探仍是以地震勘探为主，寻找比较小的构造圈闭油气藏和非构造圈闭油气藏。因此，必须提高地震勘探的分辨率。分辨率的提高，一是要加密地面的测点，二是要提高每秒钟记录的信息量，争取达到每秒 10000000 位，约为目前一般记录的 20 倍。随着分辨率的提高，应该研究新的处理程序，这就需要更大存储量的电子计算机。那时候，用来处理地震资料的电子计算机将会超过目前所能生产的最大的计算机。地面测点的加密，必然推动三维地震勘探的普及化，看来必须及早地研究三维地震模型，以便帮助地质解释。随着本世纪末地震资料解释的计算机化，在解决石灰岩地区复杂地形和地表高速层的问题时，有可能用数学模型获得满意的答案。实现这些设想，在很大程度上要导致地震基础理论的变革，就当前的情况估计，可以作出以下几点结论：

1、随着大型电子计算机的采用，有可能全面地应用波动方程理论，即应用波动方程求取所有的地震参数；

2、通过波动方程求得的地震参数，比射线理论提供的参数要精确得多，这对提高地震勘探精度和分辨率来说，是十分必要的；

3、有了上面的基础，在未来的地震资料处理中，可能会出现许多新的前景；

4、一种比较乐观的估计，就是用地震方法直接找油找气将要变成现实。

由此看来，大力发展波动方程处理技术，似乎是急不可待的事了。